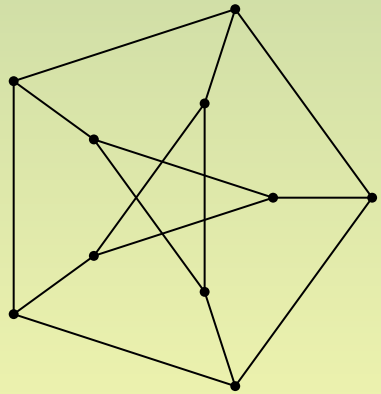
Diskretne strukture s teorijom grafova

prof. dr. sc. Blaženka Divjak



FOI, Varaždin

Sadržaj trećeg dijela

- Relacije
  - Skupovi (ponavljanje)
  - Binarne relacije
  - Relacija ekvivalencije
  - Kardinalni broj
  - Relacije uređaja
  - Linearni i dobar uređaj
  - Primjeri uređaja
  - Uređaji na kartezijevom produktu
  - Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dio III

Relacije

Sadržaj

- Relacije
  - Skupovi (ponavljanje)
  - Binarne relacije
  - Relacija ekvivalencije
  - Kardinalni broj
  - Relacije uređaja
  - Linearni i dobar uređaj
  - Primjeri uređaja
  - Uređaji na kartezijevom produktu
  - Hasseovi dijagrami

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

Zadavanje skupa

Georg Cantor – utemeljitelj teorije skupova

Skup je osnovni matematički pojam pa se ne definira. Skup čine elementi koji su po nekom kriteriju povezani u cjelinu.

Prazan skup je skup koji nema niti jedan element. Oznaka za prazan skup je $\emptyset$.

Skup je zadan ako su poznati svi njegovi elementi.

Ako skup A sadrži element a, to zapisujemo u obliku $a \in A$. Ako b nije element skupa A, to zapisujemo u obliku $b \notin A$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Skup se može zadati na dva načina:

1. Nabrajanjem elemenata skupa – ovaj način je pogodan samo kada se radi o skupovima koji nemaju veliki broj elemenata ili ako se radi o skupovima kod kojih je jasno od kojih se elemenata sastoje ako se navede nekoliko njihovih elemenata

$$A = \{3, 8, 12, -4\}$$
$$B = \{\clubsuit, \heartsuit, 1\}$$
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Evo nekoliko istinitih relacija:

$$8 \in A, \quad 1 \notin A, \quad \clubsuit \in B, \quad 5 \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

2. Definiranjem karakterističnog svojstva koji moraju elementi zadovoljavati da bi pripadali skupu.

   Opći oblik ovako zadanog skupa je $S = \{x \mid P(x)\}$, što znači da skupu S pripadaju samo oni elementi koji zadovoljavaju predikat $P(x)$.

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leqslant x < 6\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

   Naravno, skup C možemo napisati i na prvi način tako da nabrojimo sve njegove elemente $C = \{3, 4, 5\}$.

Sa zadavanjem skupa bilo je dosta problema. Fregeov pristup je bio da svako svojstvo definira neki skup. Međutim, neki matematičari su uočili da takav pristup dovodi do paradoksa, tj. da se može opisati skup i specificirati objekt za koji se ne može utvrditi da li pripada ili ne pripada tom skupu.

Cantor – ne postoji skup svih skupova

Russellov paradoks o brijaču

U nekom selu postoji brijač koji brije sve one i samo one suseljane koji ne briju sami sebe. Pitanje je tko brije brijača?

Ako brijač brije sam sebe, onda on radi ono što ne bi smio jer mu u opisu radnog mjesta stoji da brije samo one koji se sami ne briju.
Ako pak brijač ne brije sam sebe, morao bi to uraditi jer on brije one koji se sami ne briju.

Fregeov princip da svako svojstvo definira skup ne vrijedi.
Zermelo je utvrdio da kod zadavanja skupa treba uvažiti dodatan zahtjev da se elementi koji određuju skup uzimaju iz nekog **univerzalnog skupa** U na kojemu je definirano svojstvo $P(x)$.
Najčešće je jasno o kojem se univerzalnom skupu radi pa se on ne spominje eksplicitno. Skupove brojeva često koristimo kao univerzalne skupove.

Skupovi brojeva

Skup prirodnih brojeva

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Skup cijelih brojeva

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Skup racionalnih brojeva

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Skup realnih brojeva: $\mathbb{R}$

Skup kompleksnih brojeva

$$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Kardinalni broj konačnog skupa

Neka je A skup koji ima konačno mnogo elemenata. Kardinalni broj skupa A je broj elemenata koje taj skup sadrži.

Oznake za kardinalni broj skupa A su

$$k(A), \quad \operatorname{card} A, \quad |A|$$

Mi ćemo najćešće koristiti oznaku $k(A)$.

Kasnije ćemo strogo matematički definirati pojam kardinalnog broja za bilo koji skup (koji ne mora imati samo konačno mnogo elemenata).

Primjer 3.1.

Odredite kardinalne brojeve skupova $A = \{1, 2, 5, 8\}$ *i* $B = \{a, b, c, d\}$.

Primjer 3.1.

Odredite kardinalne brojeve skupova $A = \{1, 2, 5, 8\}$ *i* $B = \{a, b, c, d\}$.

Rješenje.

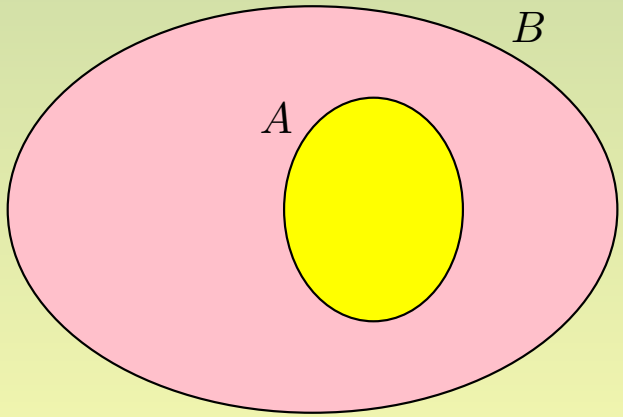
Skup A ima četiri elementa i skup B ima četiri elementa, pa je $k(A) = 4$ i $k(B) = 4$. Ovdje odmah možemo primijetiti da ako dva skupa imaju isti kardinalni broj to ne povlači da oni moraju biti jednaki, tj. da moraju imati iste elemente.

Relacije među skupovima

Relacija sadržavanja

Skup A **je podskup** skupa B ukoliko su svi elementi skupa A ujedno i elementi skupa B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$$



Jednakost skupova

Za dva skupa kažemo da su jednaka ukoliko sadrže iste elemente.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Primjer 3.2.

Da li su skupovi $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{c, c, a, b, b, b\}$ jednaki?

Jednakost skupova

Za dva skupa kažemo da su jednaka ukoliko sadrže iste elemente.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Primjer 3.2.

Da li su skupovi $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{c, c, a, b, b, b\}$ jednaki?

Rješenje.

$A = B$ zato jer oni sadrže iste elemente. Nije važno ako je neki element napisan više puta i nije važan redoslijed kojim su elementi napisani.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pravi podskup

Skup A je **pravi podskup** skupa B ako je A podskup od B i B sadrži barem jedan element koji nije sadržan u A.

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

Vrijedi također

$$A \subset B \Leftrightarrow \big(A \subseteq B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)\big)$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka je $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, 1, b, 3, 2, 2\}$. Tada je $X \subseteq Y$ jer je svaki element skupa X ujedno i element skupa Y. Međutim, vrijedi i $X \subset Y$ jer je $X \subseteq Y$ i $X \neq Y$.

Za skupove brojeva vrijede sljedeće inkluzije

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Očito je da vrijedi

Propozicija 3.1.

Za svaki skup A vrijedi $A \subseteq A$ i $\emptyset \subseteq A$.

$\emptyset \quad \rightarrow$ Ovo je prazan skup i on nema niti jedan element.

$\{\emptyset\} \quad \rightarrow$ Ovo nije prazan skup. To je skup koji sadrži jedan element i taj element je baš prazan skup. Kratko rečeno, ovo je skup koji sadrži prazan skup, tj. $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset\}\} \quad \rightarrow$ Ovo je skup koji sadrži jedan element i taj element je skup koji ima jedan element i taj element je baš prazan skup. Kratko rečeno, to je skup koji sadrži skup koji sadrži prazan skup, tj. $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, ali $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$.

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima dva elementa $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima samo jedan element $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima dva elementa $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima samo jedan element $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Primjer 3.3.

Objasnite zašto vrijede sljedeće relacije: $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ *i* $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$.

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima dva elementa $\emptyset$ i $\{\emptyset\}$.

$\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ $\rightarrow$ Ovo je skup koji ima samo jedan element $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Primjer 3.3.

Objasnite zašto vrijede sljedeće relacije: $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ *i* $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$.

Rješenje.

$\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$ vrijedi zbog toga jer je prazan skup podskup svakog skupa.

Što se tiče druge relacije, s lijeve strane imamo skup koji ima jedan element i to baš prazan skup, tj. $\emptyset \in \{\emptyset\}$, ali $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$ iz čega slijedi $\{\emptyset\} \not\subseteq \{\{\emptyset\}\}$.

Partitivni skup

Partitivni skup skupa A je skup svih podskupova od A.

Partitivni skup skupa A označavamo sa $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Kako je $\emptyset \subseteq A$ i $A \subseteq A$, slijedi da je partitivni skup uvijek neprazan skup.

Primjer 3.4.

Odredite partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.4.

Odredite partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\big\}.$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.4.

Odredite partitivni skup skupa $A = \{a, b, c\}$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\big\}.$$

Uočimo da je u prethodnom primjeru bilo $k(A) = 3$, a $k(\mathcal{P}(A)) = 8 = 2^3 = 2^{k(A)}$. To vrijedi i općenito za bilo koji konačan skup A.

Propozicija 3.2.

Neka je A konačan skup i $k(A) = n$. Tada je $k(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

Dokaz.

Trebamo prebrojiti sve podskupove skupa A. Preciznije, trebamo vidjeti koliko k-članih podskupova ima skup A, pri čemu je $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Broj k-članih podskupova u n-članom skupu jednak je $\binom{n}{k}$. Stoga je ukupni broj podskupova skupa A jednak

$$k(\mathcal{P}(A)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Uvrstimo li $x = y = 1$ u binomnu formulu

$$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

dobivamo

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

pa je zaista

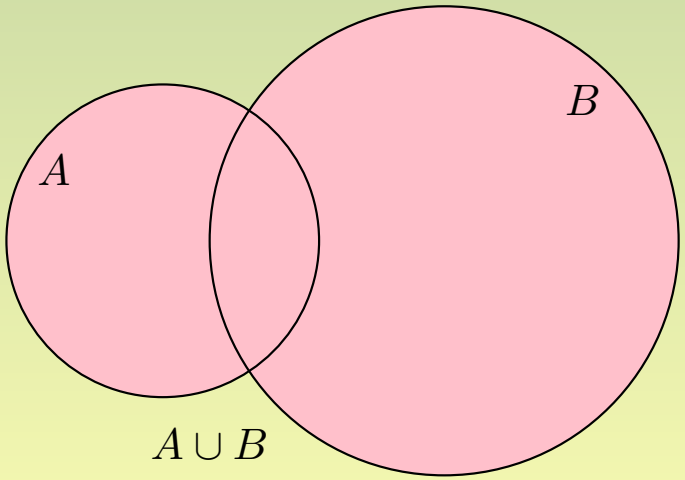
$$k(\mathcal{P}(A)) = 2^n.$$

Operacije sa skupovima

Unija

Unija dva skupa A i B je skup $A \cup B$ koji se sastoji od elemenata skupa A i elemenata skupa B.

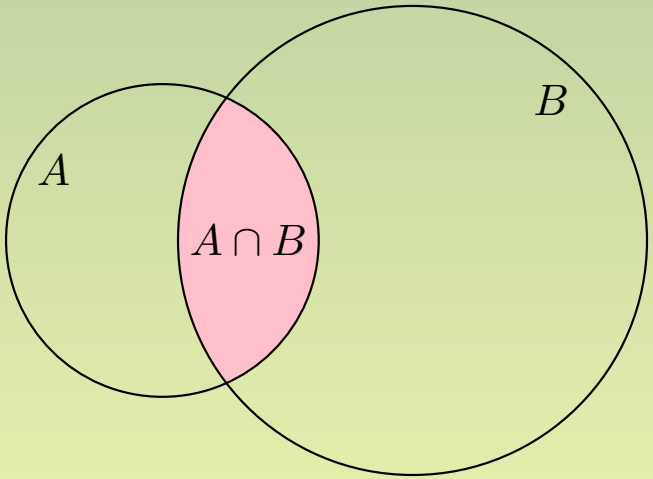
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



Presjek

Presjek dva skupa A i B je skup $A \cap B$ koji se sastoji od elemenata koji pripadaju skupu A i skupu B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



Za skupove A i B kažemo da su **disjunktni** ako nemaju zajedničkih elemenata, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Definicija unije i presjeka se može proširiti na više od dva skupa.

Unija n skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je skup

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x : x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

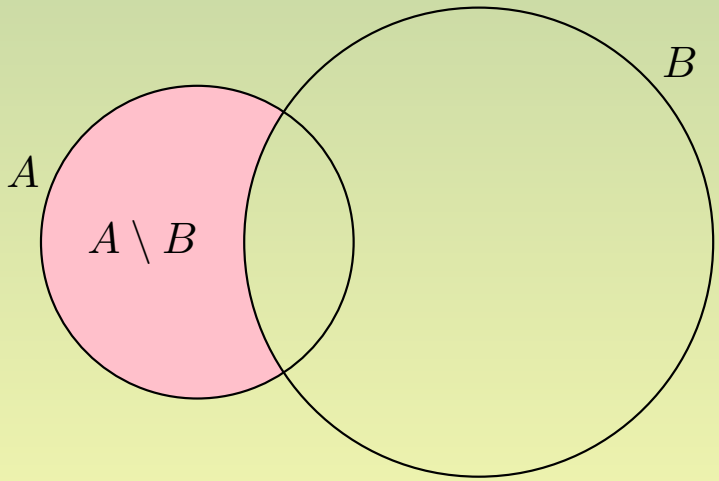
Presjek n skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je skup

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x : x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

Razlika

Razlika dva skupa A i B je skup $A \setminus B$ koji se sastoji od elemenata koji pripadaju skupu A, a ne pripadaju skupu B.

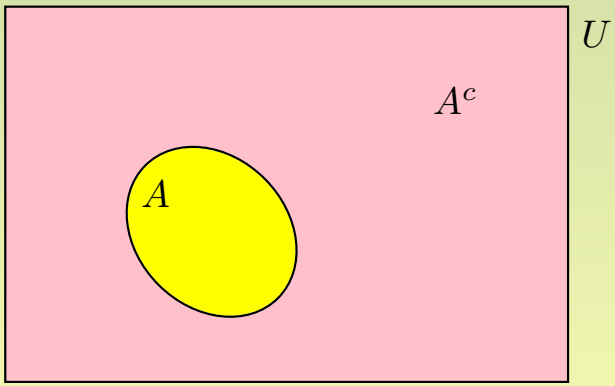
$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$



Komplement

Komplement skupa A je skup A^c koji se sastoji od svih elemenata iz univerzalnog skupa U koji nisu elementi skupa A. Ponekad komplement od A označavamo s CA ili kada želimo naglasiti univerzalni skup s $C_U A$.

$$A^c = U \setminus A = \{x : x \in U \ \wedge \ x \notin A\}$$



Primjer 3.5.

Neka je $U = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant 10\}$ *univerzalni skup i neka je* $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ *i* $B = \{3, 4, 8, 1\}$. *Odredite* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ *i* A^c.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.5.

Neka je $U = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leqslant x \leqslant 10\}$ *univerzalni skup i neka je* $A = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ *i* $B = \{3, 4, 8, 1\}$. *Odredite* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ *i* A^c.

Rješenje.

$$A \cup B = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 3, 4\}$$

$$A \cap B = \{1, 8\}$$

$$A \setminus B = \{2, 5, 6, 7\}$$

$$B \setminus A = \{3, 4\}$$

$$A^c = \{3, 4, 9, 10\}$$

Svojstva skupovskih operacija

- Idempotentnost

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$

- Komutativnost

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

- Asocijativnost

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Distributivnost

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- De Morganovi zakoni

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

- Zakon involucije

$$(A^c)^c = A$$

- Zakon identitete

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

Primjer 3.6.

Dokažite da je $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

- Zakon identitete

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup U = U, \quad A \cap U = A$$

Primjer 3.6.

Dokažite da je $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Rješenje.

Dokazat ćemo ovu jednakost na dva načina. Prvi način je pomoću tablice pripadnosti koji se ne može uvijek primijeniti, a drugi način je direktan koji se bazira na definiciji jednakosti dva skupa. Drugi način je zapravo pravi matematički dokaz.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pomoću tablice pripadnosti

Ako izaberemo neki element x iz univerzalnog skupa U, tada u slučaju dva skupa A i B imamo samo 4 moguća slučaja:

$$(1)\ x \in A,\ x \in B \qquad (2)\ x \in A,\ x \notin B$$
$$(3)\ x \notin A,\ x \in B \qquad (4)\ x \notin A,\ x \notin B$$

Na temelju toga radimo tablicu pripadnosti koja se radi na sličan način kao i semantička tablica za formulu algebre sudova.

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Direktan dokaz preko definicije jednakosti skupova

Relacija $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ je zapravo jednakost dva skupa, a iz definicije jednakosti skupova slijedi da moramo dokazati da vrijede sljedeće inkluzije:

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad \text{i} \quad A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c.$$

Direktan dokaz preko definicije jednakosti skupova

Relacija $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ je zapravo jednakost dva skupa, a iz definicije jednakosti skupova slijedi da moramo dokazati da vrijede sljedeće inkluzije:

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad \text{i} \quad A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c.$$

Dokažimo prvo da je $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. Moramo zapravo dokazati da je **svaki** element skupa $(A \cup B)^c$ ujedno i element skupa $A^c \cap B^c$. Uzmimo stoga **bilo koji** $x \in (A \cup B)^c$. To znači da $x \notin A \cup B$. Ako neki element ne pripadi uniji dva skupa, tada on ne pripada niti jednom od ta dva skupa. Dakle, $x \notin A$ i $x \notin B$.

No, tada je $x \in A^c$ i $x \in B^c$. Stoga je $x \in A^c \cap B^c$ (ako neki element pripada nekim dvama skupovima, tada on pripada i njihovom presjeku).

Sjetimo se sada od čega smo krenuli. Uzeli smo **bilo koji** $x \in (A \cup B)^c$ i dokazali da je tada $x \in A^c \cap B^c$, tj. dokazali smo

$$\forall x \big(x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \big),$$

a to znači da je

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c.$$

Na sličan način dokazujemo da je $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. Uzmimo **bilo koji** $y \in A^c \cap B^c$. Iz definicije presjeka dva skupa slijedi da je tada $y \in A^c$ i $y \in B^c$. Iz definicije komplementa skupa slijedi $y \notin A$ i $y \notin B$. Iz ovoga slijedi $y \notin A \cup B$ (ako neki element ne pripada nekim dvama skupovima, tada on ne pripada niti njihovoj uniji). No, tada je $y \in (A \cup B)^c$. Dakle, dokazali smo da vrijedi

$$\forall y \big(y \in A^c \cap B^c \Rightarrow y \in (A \cup B)^c \big),$$

odnosno da je

$$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c.$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dakle, dokazali smo da je

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c \quad \text{i} \quad A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c,$$

a po definiciji jednakosti dva skupa to znači da je

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Zadatak 3.1.

Dokažite preostala navedena svojstva skupovskih operacija na dva načina, preko tablice pripadnosti i direktno preko definicije jednakosti skupova.

Napomena.

Uočite da u slučaju da se u nekoj skupovnoj jednakosti javlja n skupova, tada tablica pripadnosti ima 2^n redaka pa je u tom slučaju nezgodno dokazivati tu jednakost na taj način zbog prevelikog broja mogućih slučajeva.

Kompliciranije relacije između skupova je nemoguće dokazivati na taj način, čak ako je i broj skupova koji se javljaju u tim relacijama malen.

Najbolji, odnosno pravi način dokazivanja relacija među skupovima provodi se uz korištenje definicija skupovskih operacija, definicije jednakosti skupova i definicije podskupa. Za takav dokaz potrebno je **razumjeti** te definicije i **primijeniti** ih na pravi način kako smo pokazali u primjeru 3.6.

Teorem 3.1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

b. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

c. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Teorem 3.1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

b. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

c. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Dokaz.

Za dokaz tvrdnje (a) imamo dva smjera. Dokažimo prvo da $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Teorem 3.1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
b. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
c. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Dokaz.

Za dokaz tvrdnje (a) imamo dva smjera. Dokažimo prvo da $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Pretpostavimo da je $A \subseteq B$. Tvrdimo da je tada $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Teorem 3.1.

Za sve skupove A i B vrijedi

a. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
b. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
c. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Dokaz.

Za dokaz tvrdnje (a) imamo dva smjera. Dokažimo prvo da $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Pretpostavimo da je $A \subseteq B$. Tvrdimo da je tada $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Neka je $X \in \mathcal{P}(A)$. To znači da je $X \subseteq A$. Kako je po pretpostavci $A \subseteq B$, slijedi da je tada i $X \subseteq B$, odnosno $X \in \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.

Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.
Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Dokažimo sada tvrdnju (b). U toj tvrdnji imamo jednakost dva skupa pa treba dokazati da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.
Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Dokažimo sada tvrdnju (b). U toj tvrdnji imamo jednakost dva skupa pa treba dokazati da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo prvo da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.

Dokažimo da vrijedi i $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$.
Pretpostavimo da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Kako je uvijek $A \in \mathcal{P}(A)$, tada zbog pretpostavke da je $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ slijedi $A \in \mathcal{P}(B)$, a to znači da je $A \subseteq B$.

Dokažimo sada tvrdnju (b). U toj tvrdnji imamo jednakost dva skupa pa treba dokazati da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ i $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo prvo da je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.
Neka je $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ proizvoljan. To znači da je $X \in \mathcal{P}(A)$ i $X \in \mathcal{P}(B)$, odnosno $X \subseteq A$ i $X \subseteq B$. No, tada je i $X \subseteq A \cap B$, odnosno $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$.

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No, tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$ pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No, tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$ pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo još tvrdnju (c). Tu treba dokazati inkluziju $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No, tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$ pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo još tvrdnju (c). Tu treba dokazati inkluziju $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
Neka je $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Tada je $X \in \mathcal{P}(A)$ ili $X \in \mathcal{P}(B)$, odnosno $X \subseteq A$ ili $X \subseteq B$. No, tada je sigurno $X \subseteq A \cup B$ pa je $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dokažimo da je također $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Neka je $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. To znači da je $Y \subseteq A \cap B$. No, tada je $Y \subseteq A$ i $Y \subseteq B$. Dakle, $Y \in \mathcal{P}(A)$ i $Y \in \mathcal{P}(B)$ pa je $Y \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Dakle, zaista je $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Dokažimo još tvrdnju (c). Tu treba dokazati inkluziju $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
Neka je $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Tada je $X \in \mathcal{P}(A)$ ili $X \in \mathcal{P}(B)$, odnosno $X \subseteq A$ ili $X \subseteq B$. No, tada je sigurno $X \subseteq A \cup B$ pa je $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Pogledajmo zašto ne vrijedi obrnuta inkluzija.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka je $A = \{1, 2\}$, a $B = \{1, 3\}$. Tada je

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$
$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$
$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$$

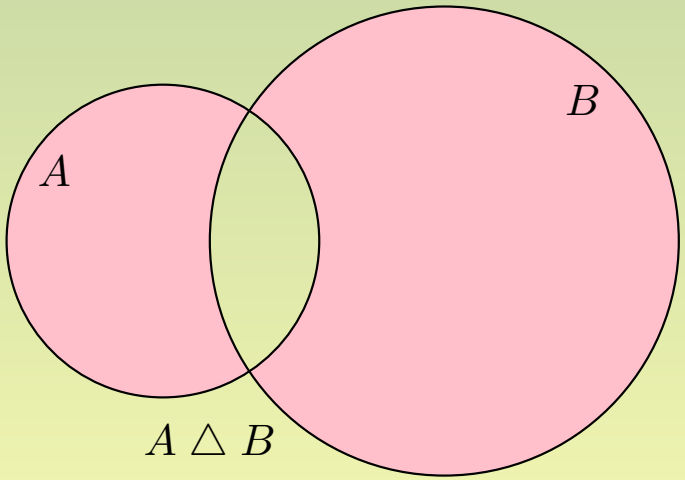
Vidimo da je $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, ali

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B).$$

Simetrična razlika

Simetričnu razliku dva skupa definiramo na dva načina.

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Zadatak 3.2.

Dokažite da su navedene definicije simetrične razlike ekvivalentne. Dokaz provedite na dva načina, preko tablice pripadnosti i direktno.

Zadatak 3.3.

Dokažite da je simetrična razlika komutativna i asocijativna operacija. Dokaz provedite na dva načina, preko tablice pripadnosti i direktno.

Tablica pripadnosti za simetričnu razliku:

A	B	$A \triangle B$
$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$

Kartezijev produkt skupova

Dvočlani skup $\{a, b\}$ zove se **par**. Kako se radi o skupu, vrijedi $\{a, b\} = \{b, a\}$. Ovakav skup može se **urediti** tako da razlikujemo njegovu prvu i drugu komponentu i u tom slučaju ga zovemo **uređenim parom** i za njega koristimo oznaku (a, b). Općenito je $(a, b) \neq (b, a)$, a jednakost vrijedi jedino u slučaju $a = b$.

Definicija uređenog para (**K. Kuratowski**)

$$(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Zadatak 3.4.

Koristeći definiciju Kuratowskog dokažite da vrijedi:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \;\; i \;\; b = d$$

Neka su A i B neprazni skupovi. **Kartezijev produkt** skupova A i B je skup $A \times B$ koji se sastoji od svih uređenih parova čija prva komponenta pripada skupu A, a druga skupu B.

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, \, y \in B\}$$

U slučaju da je $A = \emptyset$ ili $B = \emptyset$, tada je $A \times B = \emptyset$.

Kartezijev produkt $A \times A$ zapisujemo kratko A^2 i zovemo ga **Kartezijevim kvadratom** skupa A.

$$A^2 = A \times A$$

Kartezijev produkt skupova može se proširiti i na konačno mnogo skupova.
Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ neprazni skupovi. Kartezijev produkt skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je skup

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zovemo **uređenom** n**-torkom** i kod nje je važan poredak elemenata. Element a_i zove se i-ta komponenta n-torke.

U slučaju da je za neki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $A_i = \emptyset$, tada je $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \emptyset$.

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$$

Napomena.

Definicija Kartezijevog produkta skupova može se proširiti i na beskonačno mnogo skupova. Međutim, mi ovdje nećemo toliko duboko ulaziti u tu teoriju.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.7.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{a, b\}$. *Odredite* $A \times B$, $B \times A$ *i* A^2.

Primjer 3.7.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{a, b\}$. *Odredite* $A \times B$, $B \times A$ *i* A^2.

Rješenje.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Primjer 3.7.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ *i* $B = \{a, b\}$. *Odredite* $A \times B$, $B \times A$ *i* A^2.

Rješenje.

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Odmah ovdje jedna napomena. Nije $A^2 = \{1, 4, 9\}$ jer smo se dogovorili da kada se radi o skupovima, tada je $A^2 = A \times A$. Također, uočavamo da je

$$A \times B \neq B \times A$$

Primjer 3.8.

Prikažite grafički $A \times B$ ako je

a) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 3, 5\}$

b) $A = [1, 3],\ B = \langle 2, 5]$

Primjer 3.8.

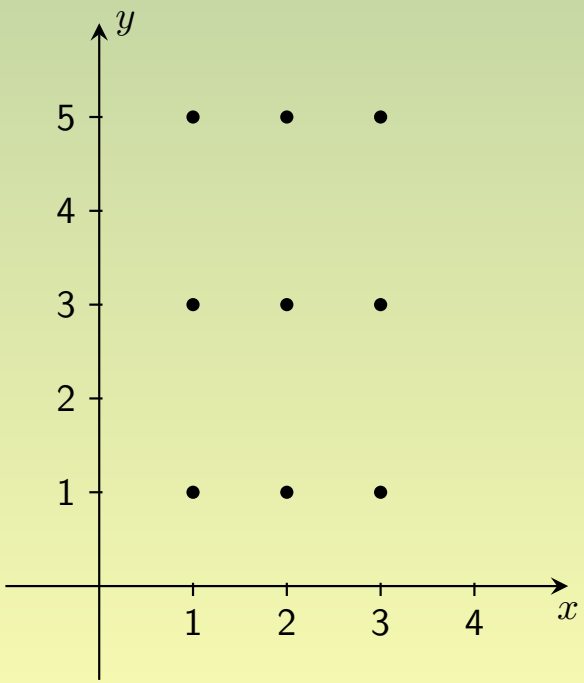
Prikažite grafički $A \times B$ ako je

a) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 3, 5\}$

b) $A = [1, 3],\ B = \langle 2, 5]$

Rješenje.

a)



Primjer 3.8.

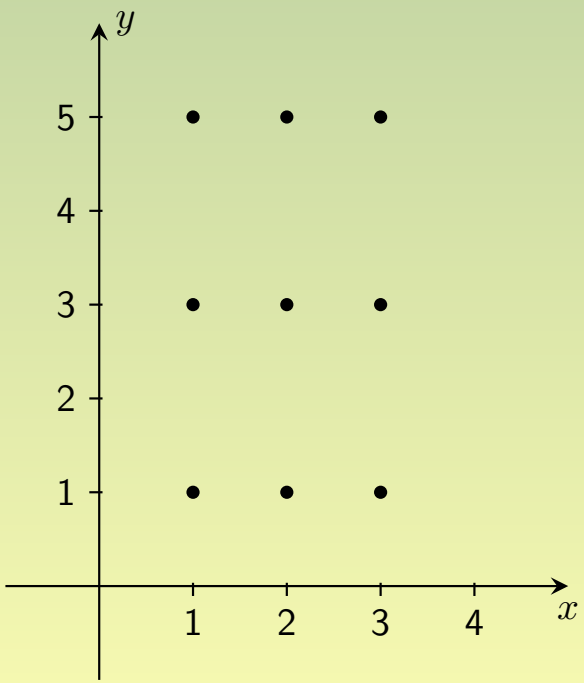
Prikažite grafički $A \times B$ ako je

a) $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 3, 5\}$

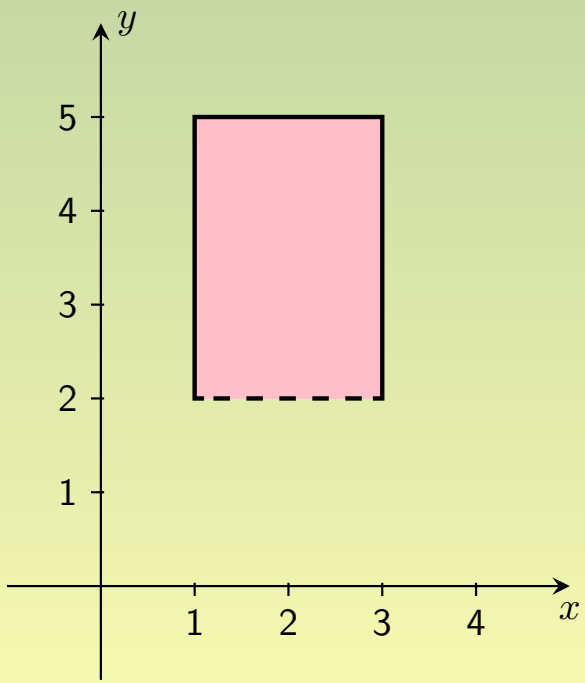
b) $A = [1, 3],\ B = \langle 2, 5]$

Rješenje.

a)



b)



Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.9.

Što predstavljaju sljedeći Kartezijevi produkti:

a. *pravac* $\times$ *pravac*

b. *pravac* $\times$ *kružnica*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.9.

Što predstavljaju sljedeći Kartezijevi produkti:

a) *pravac* $\times$ *pravac*

b) *pravac* $\times$ *kružnica*

Rješenje.

$$\text{pravac} \times \text{pravac} = \text{ravnina}$$

$$\text{pravac} \times \text{kružnica} = \text{cilindar}$$

Primjer 3.10.

Dokažite da vrijedi $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.10.

Dokažite da vrijedi $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Rješenje.

Treba dokazati jednakost dva skupa, a to znači da treba dokazati da je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ i $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Primjer 3.10.

Dokažite da vrijedi $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Rješenje.

Treba dokazati jednakost dva skupa, a to znači da treba dokazati da je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$ i $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Dokažimo prvo da je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$. Neka je $x \in A \times (B \cup C)$ proizvoljan. To znači da je $x = (x_1, x_2)$ pri čemu je $(x_1 \in A) \wedge (x_2 \in B \cup C)$, odnosno $(x_1 \in A) \wedge \big((x_2 \in B) \vee (x_2 \in C)\big)$. Koristeći distributivnost konjunkcije prema disjunkciji, slijedi da je $\big((x_1 \in A) \wedge (x_2 \in B)\big) \vee \big((x_1 \in A) \wedge (x_2 \in C)\big)$.

Kako je $x = (x_1, x_2)$, slijedi da je

$$(x \in A \times B) \vee (x \in A \times C),$$

odnosno

$$x \in (A \times B) \cup (A \times C).$$

Dakle, zaista je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

Kako je $x = (x_1, x_2)$, slijedi da je

$$(x \in A \times B) \vee (x \in A \times C),$$

odnosno

$$x \in (A \times B) \cup (A \times C).$$

Dakle, zaista je $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

Dokažimo još da je i $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$. Neka je $y \in (A \times B) \cup (A \times C)$ proizvoljan. To znači da je $(y \in A \times B) \vee (y \in A \times C)$. Slijedi da je $y = (y_1, y_2)$ pri čemu vrijedi

$$\big((y_1 \in A) \wedge (y_2 \in B)\big) \vee \big((y_1 \in A) \wedge (y_2 \in C)\big).$$

Koristeći distributivnost konjunkcije prema disjunkciji, slijedi da je

$$(y_1 \in A) \wedge \big((y_2 \in B) \vee (y_2 \in C)\big),$$

odnosno

$$(y_1 \in A) \wedge (y_2 \in B \cup C).$$

Kako je $y = (y_1, y_2)$, slijedi da je $y \in A \times (B \cup C)$, pa je stvarno $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

Binarne relacije

Pojam relacije je važan matematički pojam koji ima široku primjenu u informatici (relacijske baze podataka), gdje se često upotrebljavaju specijalne relacije kao što su relacije ekvivalencije, relacije parcijalnog uređaja i funkcije koje možemo promatrati kao relacije.

Posebno ćemo promatrati binarne relacije koje se najviše pojavljuju u raznim primjenama i njih ćemo kratko zvati relacije.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka su A i B neprazni skupovi. Svaki podskup ρ od $A \times B$ zovemo **relacija** na $A \times B$.

Ako je $(a, b) \in \rho$, tada kratko pišemo $a \ \rho \ b$ i kažemo da je a u relaciji ρ sa b.

Ako je $(a, b) \notin \rho$, tada pišemo $a \not\rho \ b$ i kažemo da a nije u relaciji ρ sa b.

Primjer 3.11.

$A = \{Ivo, Jože, Marko, Stjepan\}$, $B = \{Katica, Maja, Ivona\}$

Neka je relacija $\rho =$ *"biti zaljubljen" i uzmimo da je*

$\rho = \{(Ivo, Katica), (Jože, Ivona), (Marko, Katica), (Stjepan, Maja)\}$.

Očito je $\rho \subseteq A \times B$*, pa je* ρ *jedna relacija na* $A \times B$*.*

Npr., $(Ivo, Katica) \in \rho$*, odnosno vrijedi Ivo* ρ *Katica, odnosno riječima bismo rekli "Ivo je zaljubljen u Katicu".*

$(Stjepan, Katica) \notin \rho$*, odnosno vrijedi Stjepan* $\not\rho$ *Katica, odnosno riječima bismo rekli "Stjepan nije zaljubljen u Katicu".*

Primjer 3.12.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ *i* $B = \{1, 2\}$. *Napišite barem dvije relacije na* $A \times B$ *i* $B \times A$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.12.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{1, 2\}$. Napišite barem dvije relacije na $A \times B$ i $B \times A$.

Rješenje.

Trebamo zapravo napisati dva proizvoljna podskupa na $A \times B$, odnosno $B \times A$.

$$\rho_1 = \{(a, 1), (b, 1)\} \quad \leftarrow \text{ relacija na } A \times B$$

$$\rho_2 = \{(b, 2)\} \quad \leftarrow \text{ relacija na } A \times B$$

$$\rho_3 = \{(1, c), (1, b), (2, b)\} \quad \leftarrow \text{ relacija na } B \times A$$

$$\rho_4 = \emptyset \quad \leftarrow \text{ relacija na } B \times A \ \textbf{(prazna relacija)}$$

Primjer 3.13.

Ako je $k(A) = m$, $k(B) = n$, koliko ima različitih binarnih relacija na $A \times B$?

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.13.

Ako je $k(A) = m$, $k(B) = n$, koliko ima različitih binarnih relacija na $A \times B$?

Rješenje.

Kako je $k(A) = m$, $k(B) = n$, slijedi da je $k(A \times B) = mn$. Relacija je proizvoljan podskup od $A \times B$ pa je broj različitih relacija na $A \times B$ jednak ukupnom broju podskupova od $A \times B$, a taj broj je jednak 2^{mn}.

Relacije među elementima zadanog skupa

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pretpostavimo da je ρ relacija na skupu A, tj. $\rho \subseteq A \times A$. Takva relacija ρ se može prikazati pomoću grafa. **Čvor** ili **vrh** grafa je svaki element skupa A, a svakom uređenom paru $(a, b) \in \rho$ pridružen je jedan **luk** pri čemu se prva komponenta naziva izlaznim čvorom grafa, a druga komponenta ulaznim čvorom.

Graf relacije $\rho \subseteq A \times A$ je par (A, ρ) pri čemu je A skup čvorova (vrhova) grafa, a ρ skup lukova (bridova) grafa.

Matrica incidencije relacije $\rho \subseteq A \times A$ je tablica u kojoj se na odgovarajućem mjestu nalazi 1 ili 0, ovisno o tome da li su odgovarajući elementi u relaciji ρ ili nisu.

Primjer 3.14.

Prikažite sljedeće relacije pomoću grafa i matrice incidencije:

a. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(x, y) : x \mid y\}$

b. $A = \{a, b, c\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a)\}$

Primjer 3.14.

Prikažite sljedeće relacije pomoću grafa i matrice incidencije:

a. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(x, y) : x \mid y\}$

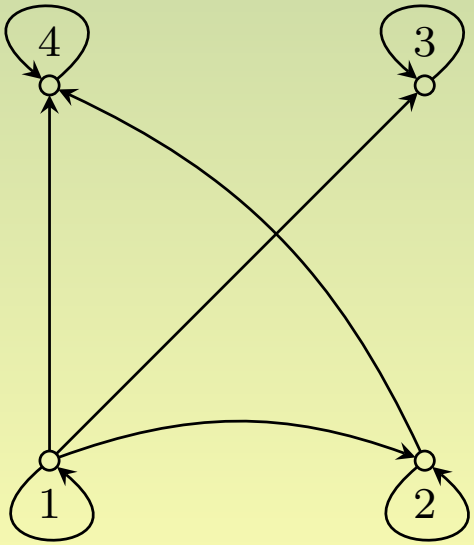
b. $A = \{a, b, c\}$, $\rho \subseteq A^2$, $\rho = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a)\}$

Rješenje.

a. Matrica incidencije

x \ y	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

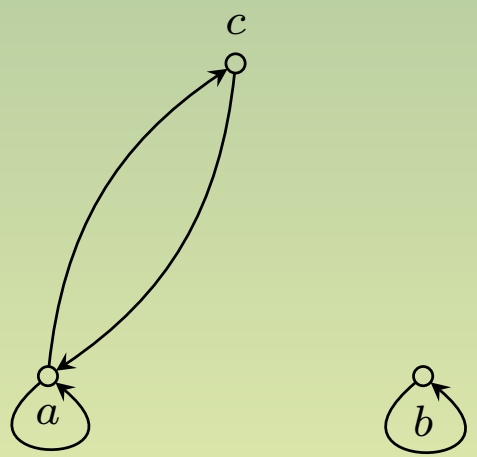
Graf relacije



- Matrica incidencije

x \ y	a	b	c
a	1	0	1
b	0	1	0
c	1	0	0

Graf relacije



Obrat i komplement relacije. Dualna relacija

Neka je $\rho \subseteq A^2$.

Obrat $\bar{\rho}$ relacije ρ

$$(a,b) \in \bar{\rho} \Leftrightarrow (b,a) \in \rho$$

Komplement ρ^c relacije ρ

$$(a,b) \in \rho^c \Leftrightarrow (a,b) \notin \rho$$

Dualna relacija ρ^d relacije ρ

$$(a,b) \in \rho^d \Leftrightarrow (b,a) \notin \rho$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.3.

Neka je $\rho \subseteq A^2$ relacija. Tada vrijedi $\rho^d = \bar{\rho}^c = \overline{\rho^c}$.

Dokaz.

Dokažimo prvo da je $\rho^d = \overline{\rho^c}$. Treba zapravo dokazati jednakost dva skupa.

$$(a,b) \in \rho^d \Leftrightarrow (b,a) \notin \rho \Leftrightarrow (b,a) \in \rho^c \Leftrightarrow (a,b) \in \overline{\rho^c}$$

Dakle, zaista je $\rho^d = \overline{\rho^c}$. Dokažimo još da je $\bar{\rho}^c = \overline{\rho^c}$.

$$(a,b) \in \bar{\rho}^c \Leftrightarrow (a,b) \notin \bar{\rho} \Leftrightarrow (b,a) \notin \rho \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (b,a) \in \rho^c \Leftrightarrow (a,b) \in \overline{\rho^c}$$

Dakle, zaista je i $\bar{\rho}^c = \overline{\rho^c}$. ♡

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.15.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ *i* $\rho = \big\{(a, b), (a, c), (b, a), (b, b)\big\}$. *Odredite obrat, komplement i dualnu relaciju od* ρ.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.15.

Neka je $A = \{a, b, c\}$ *i* $\rho = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, b)\}$. *Odredite obrat, komplement i dualnu relaciju od* ρ.

Rješenje.

$$\bar{\rho} = \{(b, a), (c, a), (a, b), (b, b)\}$$

$$A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$\rho^c = (A \times A) \setminus \rho = \{(a, a), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

$$\rho^d = \overline{\rho^c} = \{(a, a), (c, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$$

Svojstva binarnih relacija

Binarna relacija $\rho \subseteq A \times A$ je

1. **refleksivna** ako vrijedi

$$(\forall x \in A)\Big((x,x) \in \rho\Big)$$

2. **simetrična** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A)\Big((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho\Big)$$

3. **tranzitivna** ako vrijedi

$$(\forall x, y, z \in A)\Big(\big((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho\big) \Rightarrow (x,z) \in \rho\Big)$$

4. **irefleksivna** ako vrijedi

$$(\forall x \in A)\Big((x,x) \notin \rho\Big)$$

5. **antisimetrična** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A)\Big(\big((x,y) \in \rho \wedge (y,x) \in \rho\big) \Rightarrow x = y\Big)$$

ili ekvivalentno

$$(\forall x, y \in A)\Big(\big((x,y) \in \rho \wedge x \neq y\big) \Rightarrow (y,x) \in \rho^c\Big)$$

6. **asimetrična** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A)\Big((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho^c\Big)$$

7. **kompletna** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A, x \neq y)\Big((x, y) \in \rho \vee (y, x) \in \rho\Big)$$

8. **strogo kompletna** ako vrijedi

$$(\forall x, y \in A)\Big((x, y) \in \rho \vee (y, x) \in \rho\Big)$$

Lema 3.1.

Neka je $\rho \subseteq A^2$ irefleksivna i tranzitivna relacija. Tada je ρ asimetrična relacija.

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, tj. da ρ nije asimetrična relacija. Tada postoje $a, b \in A$ takvi da je $(a, b) \in \rho$ i $(b, a) \in \rho$. Po pretpostavci je ρ tranzitivna pa je tada $(a, a) \in \rho$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je ρ irefleksivna relacija. ♡

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pogledajmo sada primjer relacije koja je antisimetrična, a nije asimetrična.

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$, a $\rho = \{(1, 1), (2, 2)\}$. Tada je ρ antisimetrična relacija. Dokažimo to. Razlikujemo dva slučaja.

a. Ako je $(x, y) \in \rho$, tada je $x = y$ pa je implikacija

$$\underbrace{\big(\underbrace{(x,y) \in \rho}_{1} \wedge \underbrace{x \neq y}_{0}\big)}_{0} \Rightarrow (y, x) \in \rho^c$$

istinita (nula povlači bilo što je uvijek istina).

- b Ako $(x, y) \notin \rho$, tada je implikacija

$$\underbrace{\Big(\underbrace{(x,y) \in \rho}_{0} \wedge x \neq y\Big)}_{0} \Rightarrow (y,x) \in \rho^c$$

istinita (nula povlači bilo što je uvijek istina).

Međutim ρ nije asimetrična relacija. Naime, da bi ρ bila asimetrična relacija, trebalo bi vrijediti

$$(\forall x, y \in A)\Big((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho^c\Big).$$

No, to ne vrijedi za $x = 1$ i $y = 1$ zbog

$$\underbrace{\underbrace{(1,1) \in \rho}_{1} \Rightarrow \underbrace{(1,1) \in \rho^c}_{0}}_{0}$$

Vidjeli smo da nije svaka antisimetrična relacija ujedno i asimetrična. Međutim, svaka asimetrična relacija je i antisimetrična relacija. Naime, iz definicije asimetrične relacije slijedi da je uvijek barem jedna od tvrdnji $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$ lažna pa je implikacija

$$\Big(\underbrace{(x, y) \in \rho \wedge (y, x) \in \rho}_{0} \Big) \Rightarrow x = y$$

istinita, što znači da je ta relacija antisimetrična.

Pogledajmo razliku između kompletne i strogo kompletne relacije.

Relacija $\leqslant$ "biti manji od" je strogo kompletna relacija na skupu $\mathbb{R}$ jer za svaka dva broja x i y vrijedi jedna od tvrdnji $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$.

Relacija $<$ "biti strogo manji od" je kompletna relacija na $\mathbb{R}$ jer za svaka dva **različita** broja x i y vrijedi jedna od tvrdnji $x < y$ ili $y < x$. Međutim, ta relacija nije strogo kompletna jer **ne vrijedi** $x < x$, tj. broj nije strogo manji od samog sebe.

Algebarska karakterizacija

Neka je $\rho \subseteq A \times A$. Paru (a, b) pridružuje se **kod** c_{ab} tako da je

$$c_{ab} = 1 \Leftrightarrow (a, b) \in \rho, \qquad c_{ab} = 0 \Leftrightarrow (a, b) \notin \rho.$$

Svojstvo	**Algebarska reprezentacija**
refleksivnost	$c_{aa} = 1, \ \forall a \in A$
irefleksivnost	$c_{aa} = 0, \ \forall a \in A$
simetrija	$c_{ab} - c_{ba} = 0, \ \forall a, b \in A$
antisimetrija	$c_{ab} + c_{ba} \leqslant 1, \ \forall a, b \in A, \ a \neq b$
asimetrija	$c_{ab} + c_{ba} \leqslant 1, \ \forall a, b \in A$
kompletnost	$c_{ab} + c_{ba} \geqslant 1, \ \forall a, b \in A, \ a \neq b$
stroga kompletnost	$c_{ab} + c_{ba} \geqslant 1, \ \forall a, b \in A$
tranzitivnost	$c_{ac} \geqslant c_{ab} + c_{bc} - 1, \ \forall a, b, c \in A$

Zadatak 3.5.

Opišite i implementirajte algoritme koji će za danu relaciju ρ na konačnom skupu X zadanu matricom incidencije provjeriti da li je ta relacija refleksivna, simetrična, tranzitivna, antisimetrična, irefleksivna, asimetrična, kompletna i strogo kompletna.

Relacija ekvivalencije

Relacija ekvivalencije predstavlja oslabljeni oblik jednakosti. Detaljnije ćemo to kasnije objasniti.

Neka je $\rho \subseteq A^2$. Relacija ρ je relacija ekvivalencije ako je

1. **refleksivna**, tj.

$$(\forall x \in A)\Big((x,x) \in \rho\Big)$$

2. **simetrična**, tj.

$$(\forall x, y \in A)\Big((x,y) \in \rho \Rightarrow (y,x) \in \rho\Big)$$

3. **tranzitivna**, tj.

$$(\forall x, y, z \in A)\Big(\big((x,y) \in \rho \wedge (y,z) \in \rho\big) \Rightarrow (x,z) \in \rho\Big)$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.16.

Primjeri relacija ekvivalencije:

1. *Univerzalna relacija – svi elementi skupa su u relaciji sa svima, tj.* $\rho = A \times A$
2. *Jednakost "=" na skupu* A
3. *Paralelnost "$\parallel$" na skupu svih pravaca ravnine*
4. *Sukladnost trokuta na skupu svih trokuta ravnine*
5. *Sličnost trokuta na skupu svih trokuta ravnine*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pogledajmo zašto je relacija "biti paralelan" relacija ekvivalencije na skupu svih pravaca ravnine. Trebamo provjeriti da je ta relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Da li je refleksivna? Drugim riječima, da li je svaki pravac paralelan sam sa sobom? Da.

Da li je simetrična? Drugim riječima, ako je pravac p paralelan s pravcem q, da li je onda pravac q paralelan s pravcem p? Da.

Da li je tranzitivna? Drugim riječima, ako je pravac p paralelan s pravcem q, i ako je pravac q paralelan s pravcem r, da li je onda pravac p paralelan s pravcem r? Da.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.17.

Neka je

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ \rho \subseteq A^2,\ \rho = \big\{(x, y) : |x - y| \text{ je neparan ili } 0\big\}.$$

Ispišite elemente zadane relacije i prikažite ju pomoću tablice i grafa. Da li je to relacija ekvivalencije?

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.17.

Neka je

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\ \rho \subseteq A^2,\ \rho = \big\{(x, y) : |x - y| \text{ je neparan ili } 0\big\}.$$

Ispišite elemente zadane relacije i prikažite ju pomoću tablice i grafa. Da li je to relacija ekvivalencije?

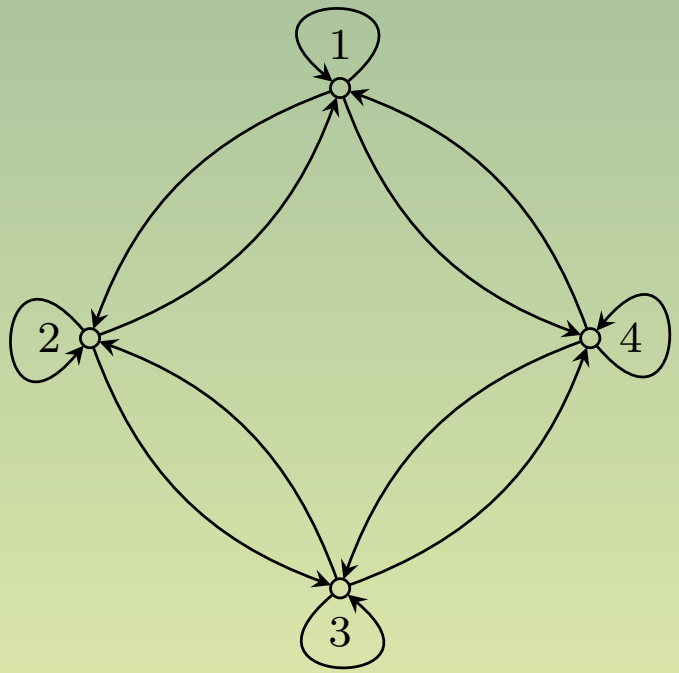
Rješenje.

Elementi relacije ρ su

$$\rho = \big\{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3),$$
$$(3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4)\big\}.$$

Matrica incidencije i graf relacije ρ

x \ y	1	2	3	4
1	1	1	0	1
2	1	1	1	0
3	0	1	1	1
4	1	0	1	1



Relacija ρ je refleksivna jer je svaki element iz A u relaciji sam sa sobom, što se vidi također iz tablice jer se na glavnoj dijagonali nalaze jedinice. Isto tako se vidi i iz grafa jer u svakom vrhu imamo petlju.

Relacija ρ je simetrična jer je njezina matrica incidencije simetrična s obzirom na glavnu dijagonalu, tj. kada god je $(a, b) \in \rho$, tada je i $(b, a) \in \rho$. Također, simetriju možemo lagano vidjeti i sa grafa. Naime, ako imamo neki brid koji počinje u vrhu a, a završava u vrhu b, tada moramo imati i brid koji počinje u vrhu b, a završava u vrhu a da bi relacija bila simetrična.

Zadana relacija ρ nije tranzitivna jer, npr. $(1, 2) \in \rho$ i $(2, 3) \in \rho$, ali $(1, 3) \notin \rho$. Dakle, relacija ρ nije relacija ekvivalencije zbog toga jer nije tranzitivna.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka je A skup. **Particijom skupa** A zovemo skup $\{A_i : i \in I\}$ nepraznih podskupova od A takvih da vrijedi:

a. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

b. $A_i \cap A_j = \emptyset$ ako je $i \neq j$, $\forall i, j \in I$

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Za $a \in A$ **klasa ekvivalencije** $[a]_\rho$ elementa a s obzirom na relaciju ρ je skup

$$[a]_\rho = \{x \in A : x \ \rho \ a\}.$$

Jednostavnije rečeno, to su svi oni elementi koji su u relaciji ρ s elementom a. Element a (ili bilo koji drugi element iz $[a]_\rho$) zovemo **reprezentantom** te klase.

Primjer 3.18.

Neka je A skup svih stanovnika Hrvatske. Neka je ρ relacija na skupu A definirana sa

$$\rho = \{(a, b) \in A^2 : a \text{ i } b \text{ stanuju u istoj županiji}\}.$$

Odredite klase ekvivalencije relacije ρ.

Primjer 3.18.

Neka je A skup svih stanovnika Hrvatske. Neka je ρ relacija na skupu A definirana sa

$$\rho = \{(a, b) \in A^2 : a \text{ i } b \text{ stanuju u istoj županiji}\}.$$

Odredite klase ekvivalencije relacije ρ.

Rješenje.

Jasno je da je ρ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije su županije. Npr., ako je $a \in A$ stanovnik Varaždinske županije, tada je $[a]_\rho$ skup svih stanovnika Varaždinske županije pa bismo kratko mogli nazvati klasu $[a]_\rho$ Varaždinskom županijom. Svaki stanovnik te županije je predstavnik te županije (odnosno te klase).

Županijama (klasama ekvivalencije) je Hrvatska (skup) podijeljena na više manjih dijelova. Kako svake dvije različite županije nemaju ništa zajedničko, županije (klase ekvivalencije) zapravo čine jednu particiju Hrvatske (skupa).

Tako lijepo svojstvo vrijedi za bilo koju relaciju ekvivalencije, što ćemo uskoro i dokazati.

Neka je A skup, a ρ relacija ekvivalencije na skupu A.
Kvocijentni skup A/ρ od A s obzirom na relaciju ρ je skup svih klasa ekvivalencije relacije ρ.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.4.

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Tada je kvocijentni skup A/ρ particija skupa A.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.4.

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Tada je kvocijentni skup A/ρ particija skupa A.

Dokaz.

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Treba dokazati sljedeće tri tvrdnje:

- klase ekvivalencije od ρ su neprazne
- svaki element iz A nalazi se u nekoj od klasa
- klase su disjunktne

Kako je ρ relacija ekvivalencije, tada je ona refleksivna pa vrijedi $a \ \rho \ a$, pa je $a \in [a]_\rho$, tj. $[a]_\rho \neq \emptyset, \quad \forall a \in A$. Dakle, sve klase su neprazne i svaki element se nalazi u nekoj od tih klasa.

Treba još dokazati da su različite klase međusobno disjunktne. Neka su $[a]_\rho$ i $[b]_\rho$ dvije različite klase ekvivalencije. Pretpostavimo da one nisu disjunktne, tj. da postoji $x \in [a]_\rho \cap [b]_\rho$. Tada vrijedi $x \ \rho \ a$ i $x \ \rho \ b$. Kako je ρ simetrična relacija, tada vrijedi i $a \ \rho \ x$. Nadalje, jer je ρ i tranzitivna relacija, tada iz $a \ \rho \ x$ i $x \ \rho \ b$ slijedi $a \ \rho \ b$. Tvrdimo da je u tom slučaju $[a]_\rho = [b]_\rho$. Trebamo dokazati jednakost dva skupa, odnosno treba dokazati da je $[a]_\rho \subseteq [b]_\rho$ i $[b]_\rho \subseteq [a]_\rho$.

Neka je $c \in [a]_\rho$ proizvoljan. Tada vrijedi $c \ \rho \ a$. No, kako vrijedi $a \ \rho \ b$, tada zbog tranzitivnosti relacije ρ slijedi $c \ \rho \ b$, a to znači da je $c \in [b]_\rho$. Dakle, $[a]_\rho \subseteq [b]_\rho$.

Obrnuto, neka je $d \in [b]_\rho$ proizvoljan. Tada vrijedi $d \ \rho \ b$. No, kako vrijedi $a \ \rho \ b$, tada zbog simetričnosti relacije ρ vrijedi i $b \ \rho \ a$. Sada iz $d \ \rho \ b$ i $b \ \rho \ a$, zbog tranzitivnosti relacije ρ, slijedi $d \ \rho \ a$, što znači da je $d \in [a]_\rho$. Dakle, $[b]_\rho \subseteq [a]_\rho$

Dokazali smo da je $[a]_\rho = [b]_\rho$, što je kontradikcija s pretpostavkom da su $[a]_\rho$ i $[b]_\rho$ različite klase ekvivalencije. Stoga je naša pretpostavka da $[a]_\rho$ i $[b]_\rho$ imaju nešto zajedničko bila pogrešna pa je zaista $[a]_\rho \cap [b]_\rho = \emptyset$.

Dakle, svake dvije klase ekvivalencije, ili su jednake, ili nemaju ništa zajedničko. ♡

Vrijedi i obrnuto.

Propozicija 3.5.

Svaka particija skupa A prirodno definira jednu relaciju ekvivalencije na skupu A.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Vrijedi i obrnuto.

Propozicija 3.5.

Svaka particija skupa A prirodno definira jednu relaciju ekvivalencije na skupu A.

Dokaz.

Relaciju ρ definiramo na sljedeći način. Za $x, y \in A$ definiramo

$$x \ \rho \ y \overset{\text{def}}{\iff} x \text{ i } y \text{ pripadaju istom elementu particije}$$

Dokažimo da je ρ relacija ekvivalencije. Relacija ρ je refleksivna, tj. vrijedi $x \ \rho \ x$ jer x i x pripadaju istom elementu particije (jer se radi zapravo o jednom elementu).

Nadalje, ako vrijedi $x \rho y$, tada iz definicije relacije ρ slijedi da elementi x i y pripadaju istom elementu particije. No, tada elementi y i x pripadaju istom elementu particije pa je ρ simetrična relacija.

Pretpostavimo da vrijedi $x \rho y$ i $y \rho z$. Tada postoje elementi A i B iz zadane particije takvi da je $x, y \in A$ i $y, z \in B$. No, tada je $y \in A \cap B$ pa je $A = B$ jer su A i B elementi particije, a to znači, ili su jednaki ili su disjunktni. Iz toga slijedi da su $x, z \in A$, odnosno elementi x i z pripadaju istom elementu particije pa vrijedi $x \rho z$. Dakle, ρ je i tranzitivna relacija. Stoga je ρ zaista relacija ekvivalencije. ♡

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A. Preslikavanje

$$p : A \to A/\rho, \quad p(x) = [x]_\rho$$

zove se prirodno ili kvocijentno preslikavanje. To preslikavanje je surjekcija koje svakom elementu iz A pridružuje klasu ekvivalencije kojoj taj element pripada.

Prijelazom sa skupa A na kvocijentni skup A/ρ relacija ekvivalencije se zamjenjuje relacijom jednakosti, tj. ekvivalentni elementi u A prelaze u jednake elemente u A/ρ (identificiraju se). Zato kažemo da relacija ekvivalencije predstavlja oslabljeni oblik jednakosti (jer mi te ekvivalentne elemente koji nisu "baš" jednaki na neki način smatramo jednakima u kvocijentnom skupu).

Sjetimo se primjera sa hrvatskim županijama. Tamo smo rekli da su dva Hrvata ekvivalentna ako žive u istoj županiji. Klase ekvivalencije su hrvatske županije. S obzirom na tu relaciju ekvivalencije svi ljudi iz iste županije su ekvivalentni, tj. smatramo ih "jednakima". Naravno da oni nisu jednaki u pravom smislu te riječi. Međutim, takva identifikacija ponekad olakšava neke stvari osobito ako se odlučuje o nekim pitanjima na nivou županija. U tom slučaju se ne gleda svaki pojedinac posebno jer odluka koja bude donešena se tiče svih ljudi iz te županije, tj. oni su na neki način u istom položaju što se tiče te odluke, odnosno oni su "jednaki".

Kvocijentni skup u većini situacija može imati znatno manje elementa od polaznog skupa pa je onda lakše raditi na njemu, nego na polaznom skupu. Kao primjer, opet možemo uzeti županije kojih ima 21, dok svih ljudi koji žive u Hrvatskoj ima znatno više, pa je jasno da je lakše donijeti neku odluku na nivou županija, nego za svakog pojedinca posebno.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

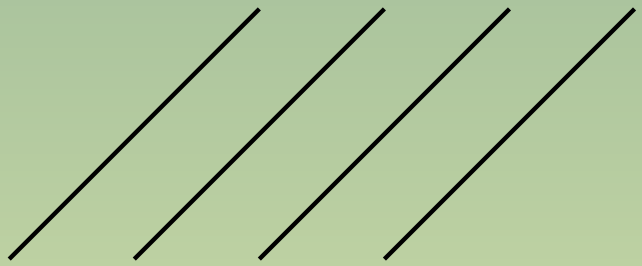
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Kvocijentni skup u većini situacija može imati znatno manje elementa od polaznog skupa pa je onda lakše raditi na njemu, nego na polaznom skupu. Kao primjer, opet možemo uzeti županije kojih ima 21, dok svih ljudi koji žive u Hrvatskoj ima znatno više, pa je jasno da je lakše donijeti neku odluku na nivou županija, nego za svakog pojedinca posebno.

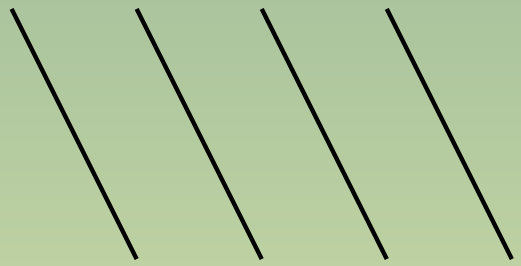
Sjetimo se i relacije "biti paralelan" na skupu svih pravaca ravnine. Što su ovdje klase ekvivalencije? Ovdje klasu ekvivalencije čine svi međusobno paralelni pravci i svakog od tih pravaca možemo uzeti za reprezentanta te klase. Ovdje se svaka od tih klasa zove **smjer** i sve međusobno paralelne pravce smatramo jednakima u smislu da određuju isti smjer.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

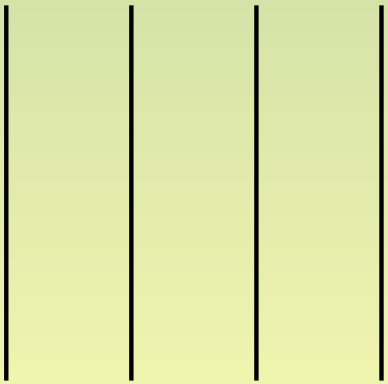
jedan smjer



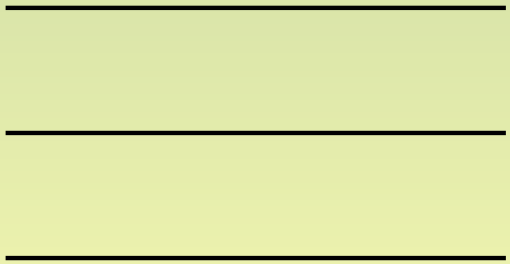
drugi smjer



treći smjer



četvrti smjer



Sjetimo se i logički ekvivalentnih formula logike sudova od n varijabli. Sve takve formule smatramo jednakima u smislu da imaju istu tablicu istinitosti i sve one pripadaju istoj klasi za čijeg predstavnika možemo uzeti disjunktivnu ili konjunktivnu normalnu formu tih formula. Takvih klasa ima samo konačno mnogo i to 2^{2^n}, iako je svih formula od n varijabli beskonačno mnogo.

Uočimo odmah ovdje i praktičnu korist prelaska na kvocijentni skup, tj. na klase formula.

Npr., zašto bi radili neki sklop komplicirane formule koji bi bio skup zbog velikog broja operacija ako možemo minimizirati tu formulu i napraviti jednostavniji sklop koji će imati manje operacija, a davat će isti izlaz kao i kompliciraniji sklop. Dakle, ovdje na logički sklop možemo gledati kao na klasu koja predstavlja sve logički ekvivalentne formule.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

- $A \leftarrow$ skup svih učenika neke škole
  $\rho \leftarrow$ "pohađati isti razred"

  Očito je ρ relacija ekvivalencije na skupu A.

  $[x]_\rho \leftarrow$ razred u školi u kojemu je učenik x

  $A/\rho \leftarrow$ skup svih razreda u školi

- $A \leftarrow$ skup svih ljudi na Zemlji
  $\rho \leftarrow$ "živjeti u istoj državi"

  Očito je ρ relacija ekvivalencije na skupu A.

  $[x]_\rho \leftarrow$ država u kojoj živi čovjek x

  $A/\rho \leftarrow$ skup svih država svijeta

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.19.

Dokažite da je $\rho \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$(x, y)\ \rho\ (u, v) \overset{\text{def}}{\iff} x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

relacija ekvivalencije. Odredite klase ekvivalencije.

Primjer 3.19.

Dokažite da je $\rho \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$(x, y)\ \rho\ (u, v) \overset{\text{def}}{\iff} x^2 + y^2 = u^2 + v^2$$

relacija ekvivalencije. Odredite klase ekvivalencije.

Rješenje.

Refleksivnost. Kako je $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$, slijedi da vrijedi $(x, y)\ \rho\ (x, y)$ za svaki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Simetričnost. Pretpostavimo da vrijedi $(x, y)\ \rho\ (u, v)$. Tada je $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$. No, onda je sigurno i $u^2 + v^2 = x^2 + y^2$, odnosno vrijedi $(u, v)\ \rho\ (x, y)$.

Tranzitivnost. Pretpostavimo da vrijedi $(x, y)\ \rho\ (u, v)$ i $(u, v)\ \rho\ (s, t)$. Tada je

$$x^2 + y^2 = u^2 + v^2, \qquad u^2 + v^2 = s^2 + t^2,$$

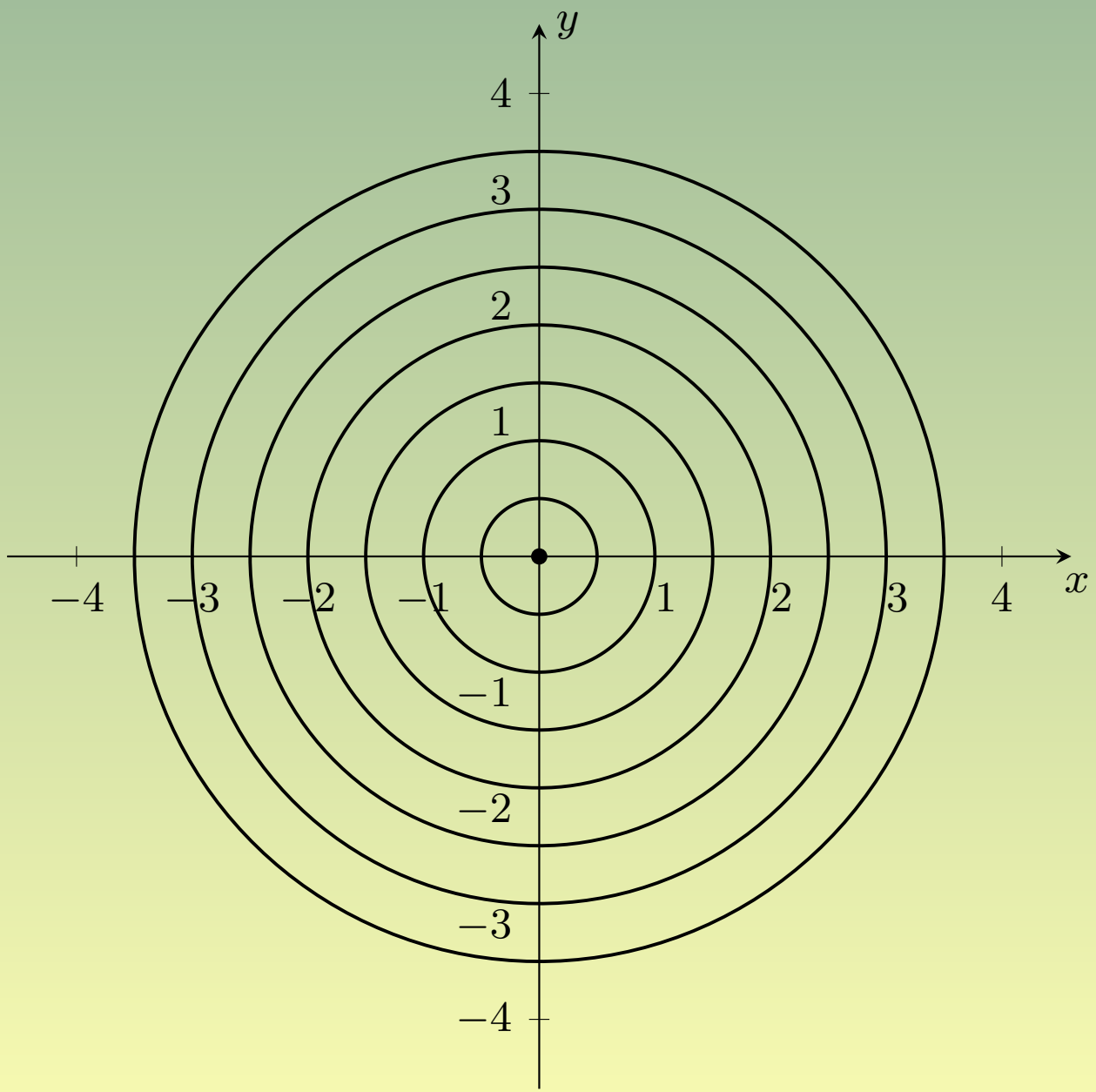
pa je $x^2 + y^2 = s^2 + t^2$, odnosno vrijedi $(x, y)\ \rho\ (s, t)$.

Klase ekvivalencije. Neka je $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ proizvoljan.

$$\begin{aligned}\big[(u, v)\big]_\rho &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)\ \rho\ (u, v)\big\} \\ &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \underbrace{u^2 + v^2}_{\text{const.} \geqslant 0}\big\}\end{aligned}$$

Dakle, klasa $\big[(u, v)\big]_\rho$ elementa (u, v) je zapravo kružnica sa središtem u ishodištu polumjera $\sqrt{u^2 + v^2}$.
Klasa elementa $(0, 0)$ je samo jedna točka i to ishodište (kružnica polumjera nula sa središtem u ishodištu).

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami



Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dakle, elementi kvocijentnog skupa su kružnice sa središtem u ishodištu. Sve točke koje leže na istoj kružnici sa središtem u ishodištu su međusobno "jednake".

Primjer 3.20.

Na skupu $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *definiramo relaciju* $\sim$ *s*

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} ab > 0.$$

a. *Dokažite da je* $\sim$ *relacija ekvivalencije na* $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b. *Odredite klase ekvivalencije elemenata* 5 *i* -5.

c. *Odredite kvocijentni skup.*

Rješenje.

Refleksivnost. Kako je $a^2 > 0$ za svaki $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, slijedi da vrijedi $a \sim a$ za svaki $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Simetričnost. Pretpostavimo da vrijedi $a \sim b$. Tada je $ab > 0$. No, onda je sigurno i $ba > 0$, odnosno vrijedi $b \sim a$.

Tranzitivnost. Pretpostavimo da vrijedi $a \sim b$ i $b \sim c$. Tada je $ab > 0$ i $bc > 0$. Množenjem tih nejednakosti dobivamo da je $(ab)(bc) > 0$, odnosno $ab^2c > 0$. Kako je $b^2 > 0$, slijedi da mora biti i $ac > 0$ iz čega slijedi $a \sim c$.

$$[5]_\sim = \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : 5 \sim a\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : 5a > 0\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : a > 0\} = \mathbb{N}$$

$$[-5]_\sim = \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : -5 \sim a\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : -5a > 0\} =$$
$$= \{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : a < 0\} = -\mathbb{N}$$

Kvocijentni skup se sastoji od dva elementa $\mathbb{N}$ i $-\mathbb{N}$, tj.

$$(\mathbb{Z} \setminus \{0\})/_\sim = \{\mathbb{N}, -\mathbb{N}\}$$

Dakle, ova relacija poistovjećuje sve prirodne brojeve i sve negativne prirodne brojeve.

Otkud znamo da imamo samo dvije klase ekvivalencije?

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.21.

Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Na skupu* A *definiramo relaciju* $\sim$ *s*

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} ab \text{ je potpuni kvadrat.}$$

a. *Odredite elemente relacije* $\sim$.

b. *Za svaki* $a \in A$ *odredite* $\bar{a} = \{x \in A : x \sim a\}$.

c. *Da li je* $\sim$ *relacija ekvivalencije na* A*? Objasnite!*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.21.

Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. *Na skupu* A *definiramo relaciju* $\sim$ *s*

$$a \sim b \overset{\text{def}}{\iff} ab \text{ je potpuni kvadrat.}$$

a. *Odredite elemente relacije* $\sim$.

b. *Za svaki* $a \in A$ *odredite* $\bar{a} = \{x \in A : x \sim a\}$.

c. *Da li je* $\sim$ *relacija ekvivalencije na* A*? Objasnite!*

Rješenje.

Kako je $\sim$ relacija na konačnom skupu koji nema puno elemenata, njezine ćemo elemente najlakše odrediti pomoću matrice incidencije.

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
2	0	1	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0
8	0	1	0	0	0	0	0	1	0
9	1	0	0	1	0	0	0	0	1

$$\sim = \{(1,1),(1,4),(1,9),(2,2),(2,8),(3,3),(4,1),(4,4),$$
$$(4,9),(5,5),(6,6),(7,7),(8,2),(8,8),(9,1),(9,4),(9,9)\}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$$\bar{1} = \{1, 4, 9\} = \bar{4} = \bar{9}$$
$$\bar{2} = \{2, 8\} = \bar{8}$$
$$\bar{3} = \{3\}, \quad \bar{5} = \{5\}, \quad \bar{6} = \{6\}, \quad \bar{7} = \{7\}$$

Kako skupovi $\{1, 4, 9\}$, $\{2, 8\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, $\{7\}$ čine particiju skupa A, tada prema ◂ Propoziciji 3.5. određuju jednu relaciju ekvivalencije na skupu A i to relaciju

$$a \; \tau \; b \iff^{\text{def}} a \text{ i } b \text{ pripadaju istom elementu particije}$$

Ali τ je zapravo relacija $\sim$, pa je $\sim$ relacija ekvivalencije.

Drugi način da pokažemo da je $\sim$ relacija ekvivalencije je da ispitamo da li je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Refleksivnost i simetričnost su vidljive iz matrice incidencije, dok bi za tranzitivnost trebalo svaki slučaj "pješice" provjeriti, što je ovdje ipak previše slučajeva.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Stoga ćemo tranzitivnost dokazati direktno, a usput možemo refleksivnost i simetričnost isto dokazati direktno.

Refleksivnost

$a \cdot a = a^2 \;\Rightarrow\; a \sim a$

Simetričnost

$a \sim b \;\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N},\, ab = n^2 \;\Rightarrow\; ba = n^2 \;\Rightarrow\; b \sim a$

Tranzitivnost

$a \sim b,\, b \sim c \;\Rightarrow\; \exists m, n \in \mathbb{N},\, ab = m^2,\, bc = n^2 \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; (ab)(bc) = m^2 n^2 \;\Rightarrow\; (ac)b^2 = m^2 n^2$

Kako je $m^2 n^2$ potpun kvadrat, tada i broj $(ac)b^2$ mora biti potpun kvadrat, a to će biti jedino ako je ac potpuni kvadrat. Dakle, $a \sim c$.

Kardinalni broj

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Već smo prije definirali pojam kardinalnog broja za konačne skupove. Sada bismo željeli definirati kardinalni broj za bilo koji skup koji ne mora nužno imati konačno mnogo elemenata. Sjetimo se da smo za konačan skup definirali njegov kardinalni broj kao broj elemenata koje taj skup sadrži. Mogli bismo naivno reći da beskonačni skup ima beskonačno mnogo elemenata i da je njegov kardinalni broj jednak beskonačno. No, postavlja se pitanje **da li su sve beskonačnosti jednake**.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Da li prirodnih brojeva ima jednako mnogo kao i racionalnih, ili racionalnih brojeva ima više nego prirodnih? Da li realnih brojeva ima više nego racionalnih ili ih ima jednako mnogo? Dakle, željeli bismo na neki način uspoređivati beskonačne skupove s obzirom na broj elemenata koji oni sadrže, a ne samo reći da oni imaju beskonačno mnogo elemenata. Takvim pitanjem se bavio **Cantor** krajem 19. st. pa ćemo ovdje uvesti pojam kardinalnog broja na način kako je to učinio Cantor.

Pojam kardinalnog broja nije nimalo jednostavan kako se to na prvi pogled može učiniti. Stoga ćemo ovdje navesti samo neke osnovne pojmove i razjasniti najosnovnije koncepte.

Ekvipotentni skupovi

Kažemo da je skup A **ekvipotentan** (ekvivalentan, jednakobrojan, bijektivan) skupu B ako postoji barem jedna bijekcija skupa A na skup B.

Oznake: $A \cong B$, $|A| = |B|$, $k(A) = k(B)$

Propozicija 3.6.

$\cong$ *je relacija ekvivalencije.*

Ekvipotentni skupovi

Kažemo da je skup A **ekvipotentan** (ekvivalentan, jednakobrojan, bijektivan) skupu B ako postoji barem jedna bijekcija skupa A na skup B.

Oznake: $A \cong B$, $|A| = |B|$, $k(A) = k(B)$

Propozicija 3.6.

$\cong$ *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz.

Refleksivnost. $A \cong A$ jer je identiteta $\mathrm{id} : A \to A$, $\mathrm{id}(x) = x$ bijekcija.

Simetričnost. Neka je $A \cong B$. To znači da postoji bar jedna bijekcija $f : A \to B$. No, kako je inverz bijekcije opet bijekcija, slijedi da je $f^{-1} : B \to A$ također bijekcija, a to znači da je $B \cong A$.

Tranzitivnost. Neka je $A \cong B$ i $B \cong C$. Tada postoje bijekcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Kako je kompozicija bijekcija opet bijekcija, slijedi da je $g \circ f : A \to C$ bijekcija, što znači da je $A \cong C$. ♡

Kardinalni broj je klasa ekvivalencije kojoj skup pripada s obzirom na relaciju $\cong$, tj. zajedničko svojstvo svih ekvipotentnih skupova. Stoga za ekvipotentne skupove govorimo da imaju isti kardinalni broj.

Skup A je **konačan** ako je prazan ili postoji bijekcija iz A u $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ako skup A nije konačan, kažemo da je **beskonačan**.

Ako je skup A konačan, $A \neq \emptyset$ i bijektivan sa $\mathbb{N}_n$, tada on ima n elemenata i pišemo $k(A) = n$. Nadalje, $k(\emptyset) = 0$.

Dakle, mi smo ovdje klasu ekvivalencije po relaciji $\cong$ kojoj pripadaju svi skupovi sa n elemenata nazvali sa n i kažemo da je kardinalni broj tih skupova jednak n.

Definicija kardinalnog broja preko klase ekvivalencije ekvipotentnih skupova je jedna sasvim prirodna definicija, iako se na prvi pogled čini kompliciranа i nejasna. No, sjetimo se kako se u školi uvodi pojam broja. Kako se djeci objašnjava što je to broj 5. Pa upravo na taj način. Objašnjava im se da broj 5 označava skup od 5 jabuka, isto tako da označa skup od 5 automobila, skup od 5 knjiga, skup od dvije jabuke i tri kruške itd., a to drugim riječima znači da svi ti skupovi pripadaju istoj klasi koju označavamo sa 5. Drugim riječima, nije bitno što su elementi tih skupova, nego je samo bitno koliko ih ima, pa na taj način djeca dolaze do apstraktnog pojma broja.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Teorem 3.2 (O konačnim skupovima).

1. *Svaki podskup konačnog skupa je konačan skup.*
2. *Svaki skup bijektivan konačnom skupu je konačan skup.*
3. *Ako je svaki pravi dio od S konačan, tada je i S konačan.*
4. *Ako je S konačan skup, tada je i $S \cup \{t\}$ konačan skup.*
5. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ je konačan i $k(\mathbb{N}_n) = n$.*
6. *Neprazan skup S je konačan akko postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S \cong \mathbb{N}_n$.*
7. *Skup S je konačan akko svaka injekcija $S \to S$ je ujedno i surjekcija.*
8. *Skup S je konačan akko svaka surjekcija $S \to S$ je ujedno i injekcija.*
9. *Skup S je konačan akko postoji $n \in \mathbb{N}$ i surjekcija $\mathbb{N}_n \to S$.*
10. *Unija konačno mnogo konačnih skupova je konačan skup.*
11. *Kartezijev produkt konačno mnogo konačnih skupova je konačan skup.*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Karakteristika je beskonačnih skupova da se mogu bijektivno preslikati na svoj pravi podskup, što za konačne skupove ne vrijedi. Skup A je **beskonačan** ako postoji injekcija $f : A \to A$ takva da je $f(A) \subset A$.

Primjer 3.22.

Dokažite da su skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ beskonačni.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Karakteristika je beskonačnih skupova da se mogu bijektivno preslikati na svoj pravi podskup, što za konačne skupove ne vrijedi. Skup A je **beskonačan** ako postoji injekcija $f : A \to A$ takva da je $f(A) \subset A$.

Primjer 3.22.

Dokažite da su skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ beskonačni.

Rješenje.

Da bismo dokazali da je skup $\mathbb{N}$ beskonačan, trebamo naći neku bijekciju sa $\mathbb{N}$ na njegov pravi podskup. Neka je $f(n) = 2n$. Tada je f bijekcija sa skupa prirodnih brojeva na skup parnih prirodnih brojeva pa iz toga slijedi da je $\mathbb{N}$ beskonačan skup.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & \cdots \end{array}$$

Što to zapravo znači? To znači da parnih brojeva ima isto toliko koliko ima i svih prirodnih brojeva, dakle nema ih ništa manje. Uočite ovdje da je skup svih parnih brojeva pravi podskup skupa $\mathbb{N}$, ali ipak ta dva skupa imaju jednak broj elemenata, tj. imaju isti kardinalni broj. Takva situacija se ne može dogoditi kod konačnih skupova.

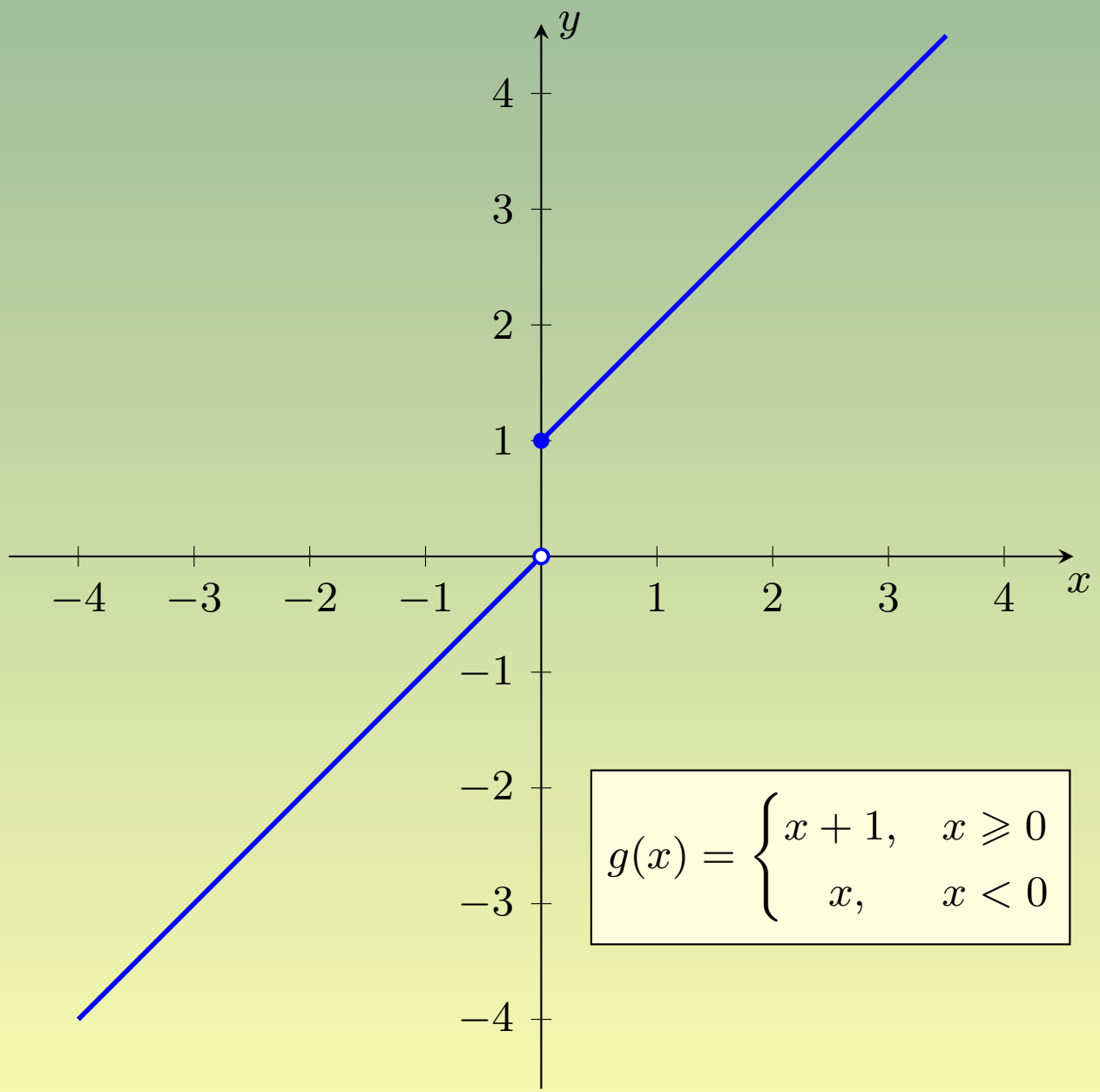
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Kako je $\mathbb{N}$ beskonačan skup i $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ slijedi da je i $\mathbb{R}$ beskonačan skup. No dokažimo ipak po definiciji da je $\mathbb{R}$ beskonačan skup tako da nađemo neku bijekciju sa $\mathbb{R}$ na njegov pravi podskup. Neka je

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Tada je g bijekcija sa $\mathbb{R}$ na njegov pravi podskup $\mathbb{R} \setminus [0,1\rangle$ kao što možemo vidjeti na sljedećoj slici.

Što nam govori ta bijekcija? Ako iz skupa $\mathbb{R}$ izbacimo interval $[0,1\rangle$, tada u preostalom skupu ima isto toliko elemenata koliko ima i u skupu $\mathbb{R}$.



$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.23.

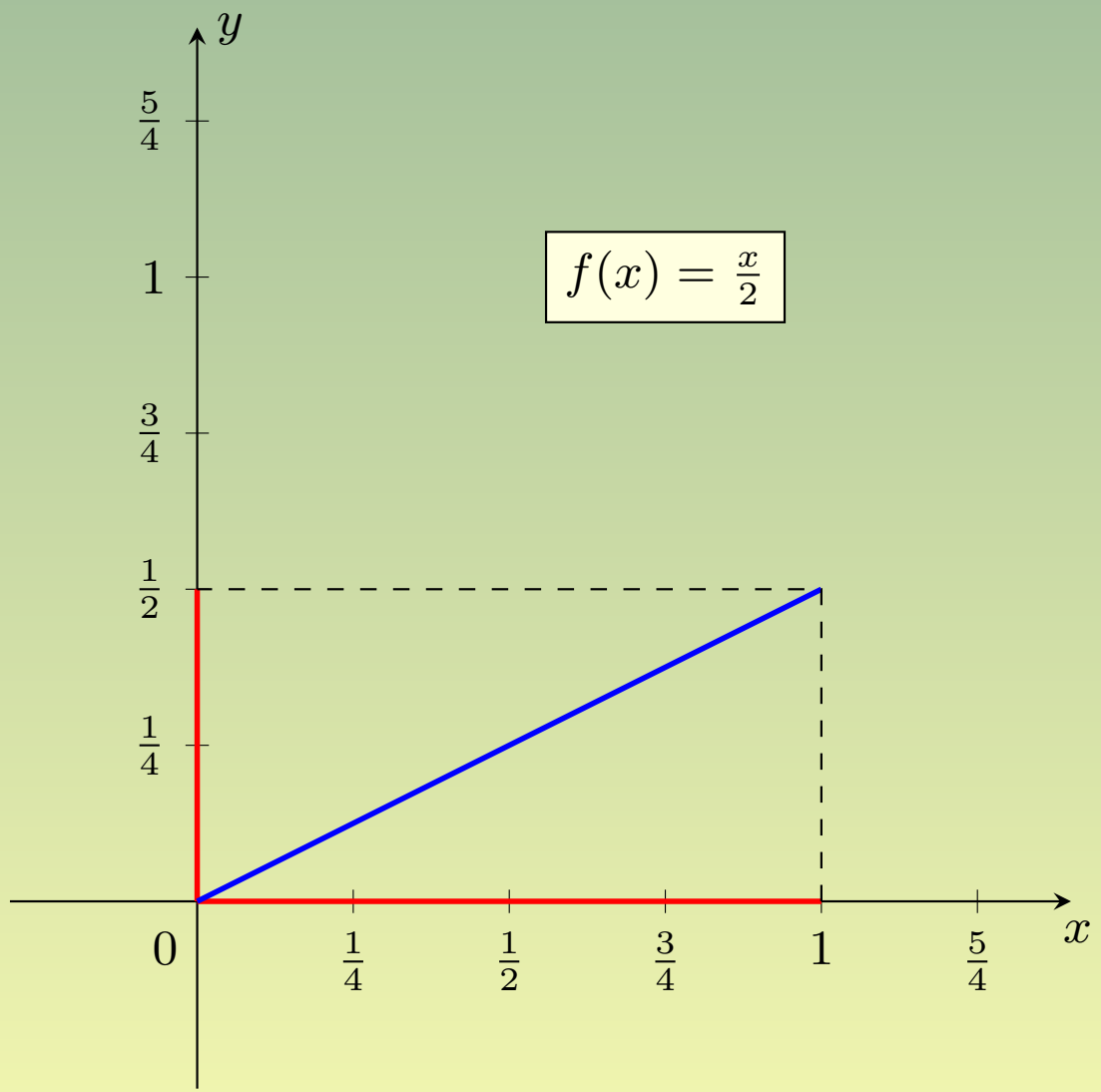
Dokažite da je skup $[0, 1]$ *beskonačan.*

Primjer 3.23.

Dokažite da je skup $[0,1]$ *beskonačan.*

Rješenje.

Da bismo dokazali da je skup $[0,1]$ beskonačan, trebamo pronaći jednu bijekciju sa tog skupa na njegov pravi podskup. Neka je $f(x) = \frac{x}{2}$. Tada je f bijekcija sa skupa $[0,1]$ na njegov pravi podskup $[0, \frac{1}{2}]$ što možemo vidjeti na sljedećoj slici. Dakle, $[0,1]$ je beskonačan skup. Skupovi $[0,1]$ i $[0, \frac{1}{2}]$ imaju isti kardinalni broj, tj. između brojeva 0 i $\frac{1}{2}$ ima jednako mnogo realnih brojeva koliko ih ima i između 0 i 1, dakle nema ih ništa manje kao što bi se na prvi pogled moglo učiniti.


y
$\frac{5}{4}$
1
$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$
$f(x) = \frac{x}{2}$
0
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$
1
$\frac{5}{4}$
x

Zadatak 3.6.

Dokažite da skupovi $[0, 1]$ *i* $[0, \frac{1}{n}]$ *imaju isti kardinalni broj za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 3.7.

Dokažite da skupovi $[a, b]$ *i* $[c, d]$ *imaju isti kardinalni broj za svaki* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *pri čemu je* $a \neq b$ *i* $c \neq d$.

Primjer 3.24.

Dokažite da skupovi $\mathbb{R}^+$ *i* $\langle 0, 1\rangle$ *imaju isti kardinalni broj, gdje je* $\mathbb{R}^+ = \langle 0, \infty\rangle$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Rješenje.

Definiramo funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \langle 0, 1\rangle$ sa $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Dokažimo da je f bijekcija iz čega će slijediti tvrdnja.

Injektivnost

$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} \Rightarrow xy + x = xy + y \Rightarrow x = y$

Dakle, f je zaista injekcija.

Rješenje.

Definiramo funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \langle 0, 1\rangle$ sa $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Dokažimo da je f bijekcija iz čega će slijediti tvrdnja.

Injektivnost

$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} \Rightarrow xy + x = xy + y \Rightarrow x = y$

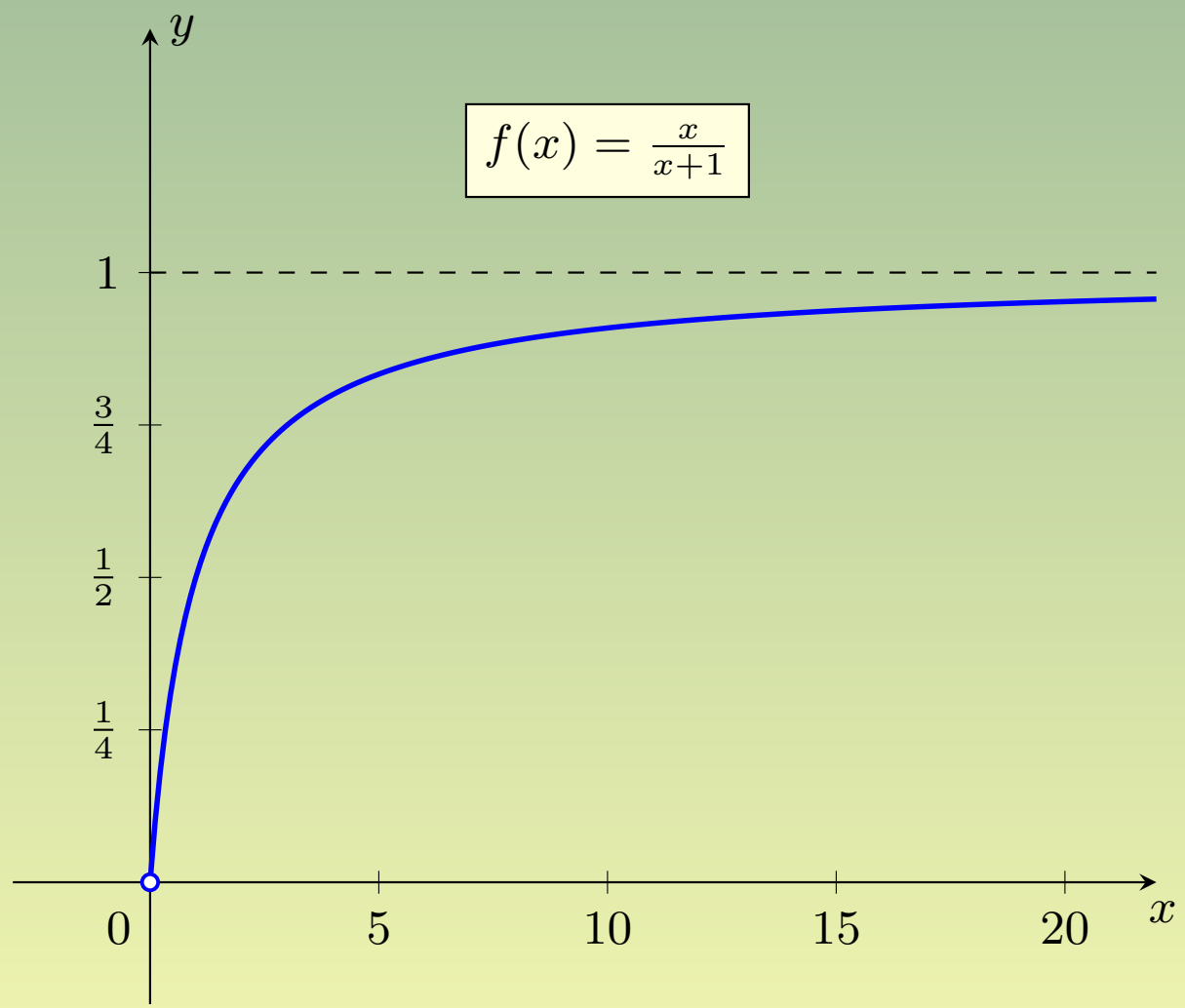
Dakle, f je zaista injekcija.

Surjektivnost

Neka je $y \in \langle 0, 1\rangle$ proizvoljan. Tražimo $x \in \mathbb{R}^+$ takav da je $f(x) = y$, odnosno $\frac{x}{x+1} = y$. Izrazimo li iz te jednadžbe x pomoću y, dobivamo $x = \frac{y}{1-y}$. Kako je $y \in \langle 0, 1\rangle$, slijedi da je $\frac{y}{1-y} \in \mathbb{R}^+$ i vrijedi $f\left(\frac{y}{1-y}\right) = y$ pa je f zaista surjekcija.

Dakle, svih pozitivnih realnih brojeva ima isto toliko koliko i svih realnih brojeva u intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami



Primjer 3.25.

Dokažite da skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^+$ imaju isti kardinalni broj, tj. da svih pozitivnih realnih brojeva ima isto toliko koliko ima i svih realnih brojeva.

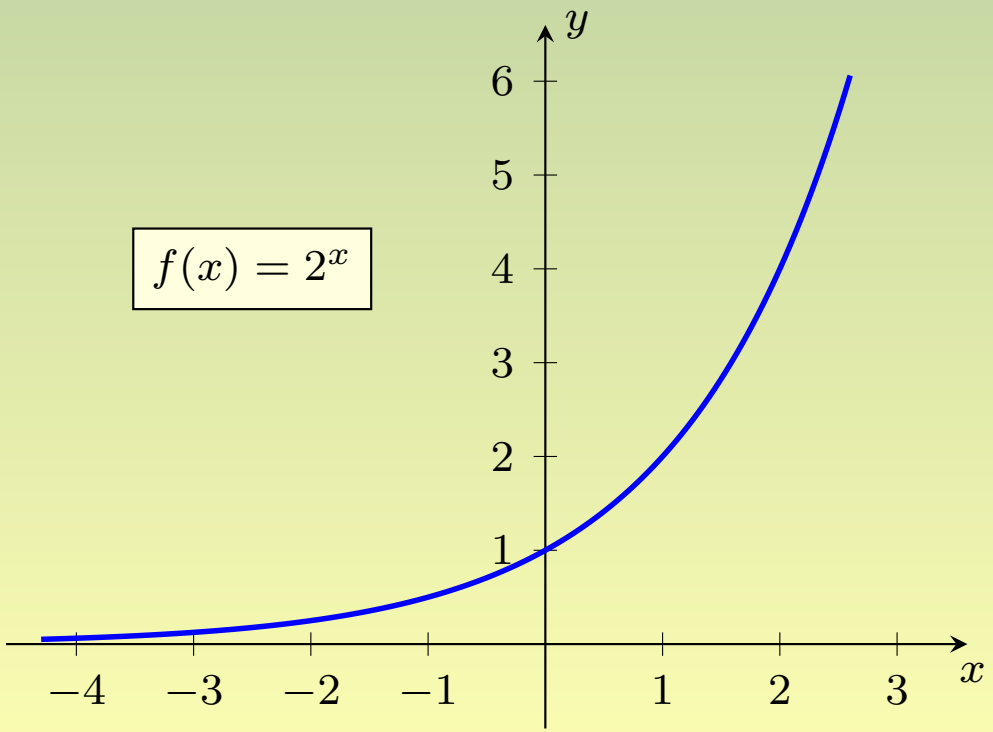
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.25.

Dokažite da skupovi $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^+$ imaju isti kardinalni broj, tj. da svih pozitivnih realnih brojeva ima isto toliko koliko ima i svih realnih brojeva.

Rješenje.

Bilo koja eksponencijalna funkcija je bijekcija sa $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}^+$, npr. uzmimo $f(x) = 2^x$.



Dokazali smo da je

$$\mathbb{R}^+ \cong \langle 0,1\rangle \quad \text{i} \quad \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^+.$$

Zbog simetričnosti relacije $\cong$ slijedi da je

$$\langle 0,1\rangle \cong \mathbb{R}^+ \quad \text{i} \quad \mathbb{R}^+ \cong \mathbb{R},$$

a zbog tranzitivnosti relacije $\cong$ slijedi da je

$$\langle 0,1\rangle \cong \mathbb{R}.$$

Dakle, svih realnih brojeva ima isto toliko koliko ima i realnih brojeva u intervalu $\langle 0,1\rangle$, nema ih ništa više.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.26.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $\langle 0,1\rangle$ *imaju isti kardinalni broj.*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.26.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $\langle 0,1\rangle$ *imaju isti kardinalni broj.*

Rješenje.

Neka je $f : [0,1] \to \langle 0,1\rangle$ definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{inače} \end{cases}$$

Tvrdimo da je f bijekcija. Neka je

$$S = \left\{ \tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.$$

Tada vidimo da je funkcija f na skupu $[0,1] \setminus S$ identiteta, pa je $f : [0,1] \setminus S \to [0,1] \setminus S$ bijekcija.

Treba još pokazati da funkcija f bijektivno preslikava skup S na skup $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2\right\}$. Naime, jedini elementi koje još nismo gledali iz skupa $[0,1]$ su brojevi

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots, \qquad (*)$$

a jedini brojevi koji još nisu "pogođeni" u $\langle 0,1\rangle$ su

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ldots \qquad (**)$$

No funkcija f bijektivno preslikava $(*)$ na $(**)$

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \cdots \end{array}$$

Dakle, f je zaista bijekcija pa skupovi $[0,1]$ i $\langle 0,1\rangle$ imaju isti kardinalni broj, tj. imaju jednak broj elemenata.

Dakle, nije istina da skup $[0,1]$ ima dva elementa više od skupa $\langle 0,1\rangle$, oni imaju jednak broj elemenata.

Primjer 3.27.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $[0,1\rangle$ *imaju isti kardinalni broj.*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dakle, f je zaista bijekcija pa skupovi $[0,1]$ i $\langle 0,1\rangle$ imaju isti kardinalni broj, tj. imaju jednak broj elemenata.

Dakle, nije istina da skup $[0,1]$ ima dva elementa više od skupa $\langle 0,1\rangle$, oni imaju jednak broj elemenata.

Primjer 3.27.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $[0,1\rangle$ *imaju isti kardinalni broj.*

Rješenje.

Definiramo funkciju $f : [0,1] \to [0,1\rangle$ sa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{inače} \end{cases}$$

Tvrdimo da je f bijekcija. Neka je

$$S = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tada vidimo da je funkcija f na skupu $[0,1] \setminus S$ identiteta, pa je

$$f : [0,1] \setminus S \to [0,1] \setminus S$$

bijekcija. Treba još pokazati da funkcija f bijektivno preslikava skup S na skup $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \right\}$.

Naime, jedini elementi koje još nismo gledali iz skupa $[0,1]$ su brojevi

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots, \qquad (\star)$$

a jedini brojevi koji još nisu "pogođeni" u $[0,1\rangle$ su

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ldots \qquad (\star\star)$$

No funkcija f bijektivno preslikava $(\star)$ na $(\star\star)$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \ldots
\end{array}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dakle, f je zaista bijekcija pa skupovi $[0,1]$ i $[0,1\rangle$ imaju isti kardinalni broj, tj. imaju jednak broj elemenata.

Dakle, nije istina da skup $[0,1]$ ima jedan element više od skupa $[0,1\rangle$, oni imaju jednak broj elemenata.

Primjer 3.28.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $\langle 0,1]$ *imaju isti kardinalni broj.*

Dakle, f je zaista bijekcija pa skupovi $[0,1]$ i $[0,1\rangle$ imaju isti kardinalni broj, tj. imaju jednak broj elemenata.

Dakle, nije istina da skup $[0,1]$ ima jedan element više od skupa $[0,1\rangle$, oni imaju jednak broj elemenata.

Primjer 3.28.

Dokažite da skupovi $[0,1]$ *i* $\langle 0,1]$ *imaju isti kardinalni broj.*

Rješenje.

Kao prvo, skupovi $\langle 0,1]$ i $[0,1\rangle$ imaju isti kardinalni broj jer je preslikavanje

$$f : \langle 0,1] \to [0,1\rangle, \qquad f(x) = 1 - x$$

bijekcija.

Stoga je $\langle 0,1] \cong [0,1\rangle$. Iz prethodnog primjera znamo da je $[0,1] \cong [0,1\rangle$. Zbog simetričnosti relacije $\cong$ je

$$\langle 0,1] \cong [0,1\rangle \quad \text{i} \quad [0,1\rangle \cong [0,1],$$

a zbog tranzitivnosti relacije $\cong$ slijedi

$$\langle 0,1] \cong [0,1].$$

Napomena.

Neka su $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b$. Tada skupovi $[a,b]$, $[a,b\rangle$, $\langle a,b]$ i $\langle a,b\rangle$ imaju isti kardinalni broj.

Prebrojivi i neprebrojivi skupovi

Sada ćemo konačno vidjeti da nisu sve beskonačnosti jednake.

Kažemo da je skup A **prebrojivo beskonačan** ako i samo ako ima kardinalni broj jednak kardinalnom broju skupa $\mathbb{N}$, tj. ako je $k(A) = k(\mathbb{N})$.

Kažemo da je skup A **prebrojiv** ako je konačan ili prebrojivo beskonačan.

Za skup A kažemo da je **neprebrojiv** ako nije prebrojiv.

Oznaka za kardinalni broj skupa $\mathbb{N}$ je

$$k(\mathbb{N}) = \aleph_0 \qquad \text{(alef nula)}.$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.7.

Skup $\mathbb{Z}$ *je prebrojiv, tj.* $k(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.7.

Skup $\mathbb{Z}$ je prebrojiv, tj. $k(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

Dokaz.

Treba dokazati da postoji barem jedna bijekcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Tražena bijekcija je

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & 5 & \cdots \end{array}$$

odnosno

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

Teorem 3.3.

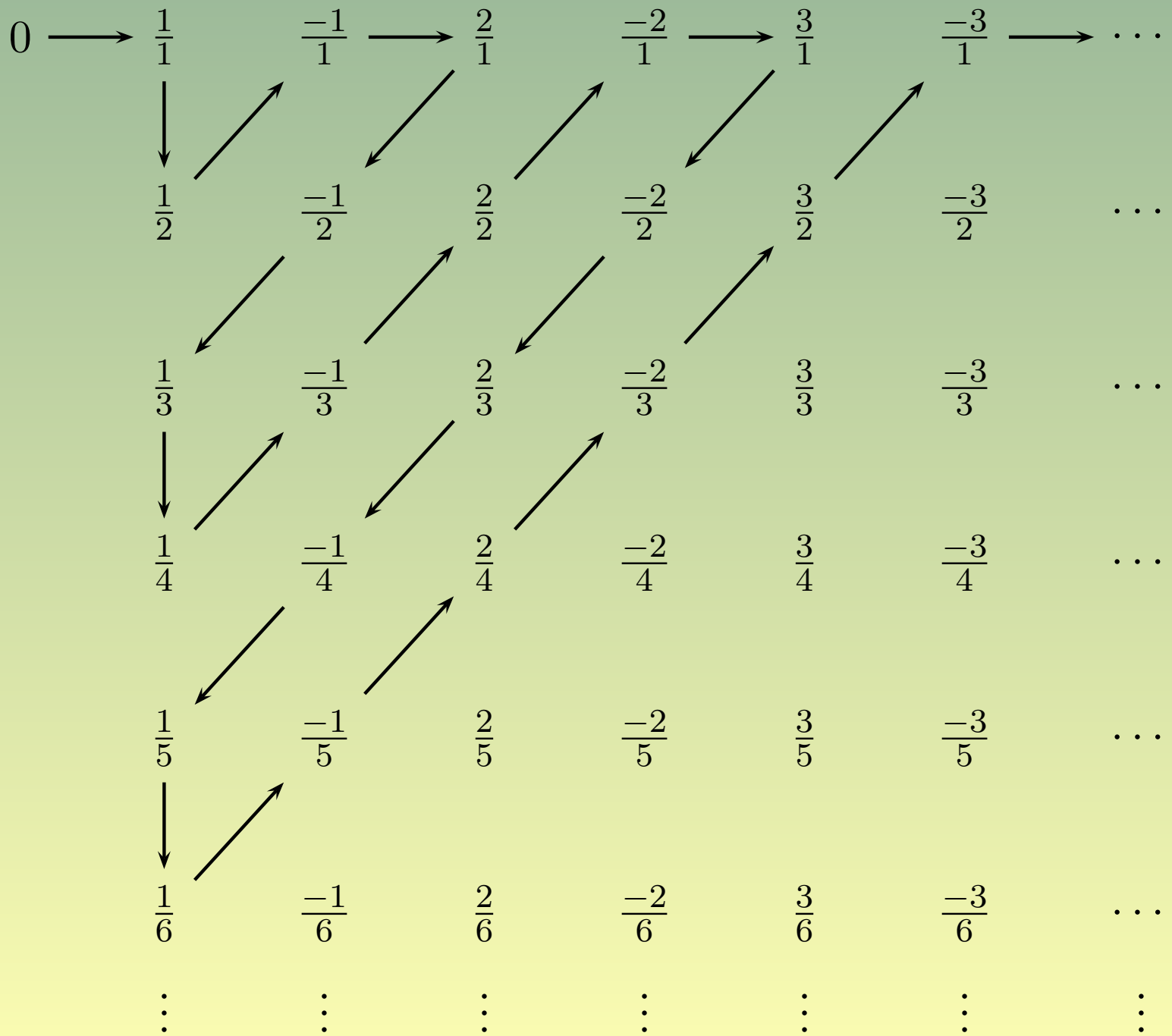
Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv, tj. $k(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, odnosno sve racionalne brojeve možemo napisati u jedan niz.

Teorem 3.3.

Skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv, tj. $k(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, odnosno sve racionalne brojeve možemo napisati u jedan niz.

Dokaz.

Najprije ćemo sve racionalne brojeve različite od nule "zapisati" u jednu tablicu koja će imati beskonačno mnogo redaka i stupaca. U prvi redak smjestimo prvo sve racionalne brojeve s nazivnikom 1 (tj. cijele brojeve) tako da suprotne brojeve pišemo jedan pokraj drugog s time da prvo napišemo pozitivan, a onda negativan broj. Na isti način u drugi redak napišemo sve racionalne brojeve s nazivnikom 2, u treći redak sve racionalne brojeve s nazivnikom 3 itd., kako je prikazano na slici.



Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

Drugi korak je da sada sve racionalne brojeve napišemo u jedan niz obilazeći tablicu po dijagonalama kako je prikazano na slici. Kako je u toj tablici svaki racionalni broj (osim nule) napisan beskonačno puta (jer prikaz racionalnog broja nije jedinstven), tada svaki put kad u tablici naiđemo na neki racionalni broj koji je već napisan u nizu, preskočimo ga tako da u tom nizu svaki racionalni broj bude napisan samo jedanput. Početak toga niza je

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ -1,\ 2,\ \frac{-1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{-1}{3},\ -2,\ 3,\ \frac{2}{3},\ \frac{-1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots$$

Jasno je da će se na taj način u tom nizu nalaziti svi racionalni brojevi. Dakle, uspjeli smo sve racionalne brojeve napisati u jedan niz (pobrojali smo ih), a to znači da ih ima koliko ima i prirodnih brojeva, tj. $k(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. ♡

Teorem 3.4.

Skup $\langle 0, 1]$ *je neprebrojiv.*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Teorem 3.4.

Skup $\langle 0, 1]$ *je neprebrojiv.*

Dokaz.

Pretpostavimo da je skup $\langle 0, 1]$ prebrojiv. Tada ga možemo zapisati u obliku niza

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots \qquad (\clubsuit)$$

Svaki element c_n možemo napisati u obliku decimalnog broja s beskonačno mnogo decimala različitih od nule (npr. $0.5 = 0.4\dot{9}$).

$$c_1 = 0.a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots$$
$$c_2 = 0.a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots$$
$$\vdots$$
$$c_n = 0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots$$
$$\vdots$$

Neka je $b = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ realni broj definiran na sljedeći način. Neka je $b_n = 1$ ako je $a_{nn} \neq 1$ i $b_n = 2$ ako je $a_{nn} = 1$. Očito je $b \in \langle 0, 1]$ i jasno je da je b različit od svih c_n-ova. Naime $b \neq c_n$ jer je $b_n \neq a_{nn}$. Naša pretpostavka da se u nizu (♣) nalaze svi brojevi iz $\langle 0, 1]$ je pogrešna pa je skup $\langle 0, 1]$ neprebrojiv. ♡

Dakle u skupu $\langle 0, 1]$ ima puno više elemenata, nego što ih ima u skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$.

Od prije znamo sljedeće

$$\langle 0, 1] \cong \langle 0, 1\rangle \cong \mathbb{R}.$$

Kardinalni broj skupa $\mathbb{R}$ označavamo sa c, tj.

$$k(\mathbb{R}) = c. \qquad \text{(kontinuum)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} k(\mathbb{N}) = k(\mathbb{Z}) = k(\mathbb{Q}) = \aleph_0 \\ k(\mathbb{R}) = k(\langle 0, 1\rangle) = c \end{array}}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Hipoteza kontinuuma

Cantor je postavio sljedeće pitanje:

Postoji li kardinalni broj k takav da je $\aleph_0 < k < c$?

Paul Cohen je 1966. godine za odgovor na to pitanje dobio Fieldsovu medalju. Odgovor glasi: uz standardni skup aksioma teorije skupova ne može se odgovoriti na to pitanje. Zato matematičari ovu hipotezu ponekad dodaju skupu osnovnih aksioma teorije skupova i na taj način "odlučuju" da hipoteza vrijedi. Sam Cohen je rekao:

"Pojam skupa je previše zamagljen da bi hipoteza kontinuuma mogla biti potvrđena ili oborena."

Parcijalni uređaj

Kao što relacija ekvivalencije poopćuje relaciju jednakosti, tako relacija parcijalnog uređaja poopćuje relaciju $\leqslant$.

Neka je $\preccurlyeq \subseteq A^2$. Relacija $\preccurlyeq$ je relacija parcijalnog uređaja ako je

1. **refleksivna**, tj.
$$(\forall x \in A)\big(x \preccurlyeq x\big)$$
2. **antisimetrična**, tj.
$$(\forall x, y \in A)\Big(\big(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x\big) \Rightarrow x = y\Big)$$
3. **tranzitivna**, tj.
$$(\forall x, y, z \in A)\Big(\big(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z\big) \Rightarrow x \preccurlyeq z\Big)$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Skup zajedno sa parcijalnim uređajem zovemo **parcijalno uređen skup**.

Ako u parcijalno uređenom skupu $\left(A, \preccurlyeq\right)$ za neka dva elementa vrijedi

$$x \preccurlyeq y \quad \text{i} \quad x \neq y,$$

tada to kratko zapisujemo

$$x \prec y.$$

Relacija $\prec$ nije relacija parcijalnog uređaja jer nije refleksivna (antisimetrična i tranzitivna jest).

- $(\mathbb{R}, \leqslant)$ je parcijalno uređen skup

  Refleksivnost. Za svaki realni broj x vrijedi $x \leqslant x$.

  Antisimetričnost. Ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, tada je $x = y$.

  Tranzitivnost. Ako je $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$, tada je $x \leqslant z$.

- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je parcijalno uređen skup

  Refleksivnost. Za svaki skup X vrijedi $X \subseteq X$.

  Antisimetričnost. Ako je $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq X$, tada je $X = Y$.

  Tranzitivnost. Ako je $X \subseteq Y$ i $Y \subseteq Z$, tada je $X \subseteq Z$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Dok se svaka dva realna broja mogu usporediti, u skupu $\mathcal{P}(A)$ postoje elementi koji nisu usporedivi. Na primjer,

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

Elementi $\{1\}$ i $\{2\}$ nisu usporedivi jer

$$\{1\} \not\subseteq \{2\} \quad \text{i} \quad \{2\} \not\subseteq \{1\}.$$

S druge strane, npr. elementi $\{1\}$ i $\{1, 3\}$ su usporedivi jer vrijedi

$$\{1\} \subseteq \{1, 3\}.$$

Primjer 3.29.

Da li je $(\mathbb{Z}, <)$ *parcijalno uređen skup?*

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.29.

Da li je $(\mathbb{Z}, <)$ *parcijalno uređen skup?*

Rješenje.

$(\mathbb{Z}, <)$ nije parcijalno uređen skup jer $<$ nije refleksivna relacija, tj. $x \not< x$.

Primjer 3.29.

Da li je $(\mathbb{Z}, <)$ *parcijalno uređen skup?*

Rješenje.

$(\mathbb{Z}, <)$ nije parcijalno uređen skup jer $<$ nije refleksivna relacija, tj. $x \not< x$.

Podskupovi parcijalno uređenog skupa su također parcijalno uređeni skupovi preko relacije parcijalnog uređaja naslijeđene iz nadskupa.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka je $\left(X, \preccurlyeq\right)$ parcijalno uređen skup i $S \subseteq X$.

Kažemo da je $x \in X$ **donja međa** skupa S ako vrijedi

$$x \preccurlyeq s, \forall s \in S.$$

Za skup S kažemo da je **odozdo omeđen** ako skup S ima barem jednu donju među u X.

Kažemo da je $x \in X$ **gornja međa** skupa S ako vrijedi

$$s \preccurlyeq x, \forall s \in S.$$

Za skup S kažemo da je **odozgo omeđen** ako skup S ima barem jednu gornju među u X.

Napomena.

Donja međa ne mora pripadati skupu S, ali mora biti usporediva sa svim elementima skupa S (mora biti manja od svih elemenata skupa S).

Napomena.

Gornja međa ne mora pripadati skupu S, ali s njom moraju biti usporedivi svi elementi skupa S (svi elementi skupa S moraju biti manji od nje).

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ parcijalno uređen skup i $S \subseteq X$.

Element $x \in X$ (ako postoji) zovemo **infimum** skupa S i označavamo s $\inf S$ ako vrijedi:

i. $x = \inf S$ je donja međa skupa S

ii. $x = \inf S$ je najveća donja međa skupa S u X, tj. za svaku donju među $y \in X$ skupa S vrijedi $y \preccurlyeq \inf S$

Ako je skup S takav da je njegov infimum sadržan u skupu S, tj. $\inf S \in S$, tada se $\inf S$ zove **minimum** skupa S (**najmanji element** skupa S) i označava se sa $\min S$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ parcijalno uređen skup i $S \subseteq X$.

Element $x \in X$ (ako postoji) zovemo **supremum** skupa S i označavamo sa $\sup S$ ako vrijedi:

i. $x = \sup S$ je gornja međa skupa S
ii. $x = \sup S$ je najmanja gornja međa skupa S u X, tj. za svaku gornju među $y \in X$ skupa S vrijedi $\sup S \preccurlyeq y$

Ako je skup S takav da je njegov supremum sadržan u skupu S, tj. $\sup S \in S$, tada se $\sup S$ zove **maksimum** skupa S (**najveći element** skupa S) i označava se sa $\max S$.

Napomena.

Najmanji element skupa S (minimum skupa S) je onaj element $s \in S$ (ako postoji) koji je usporediv sa svim elementima skupa S, tj.

$$s = \min S \overset{\text{def}}{\iff} s \in S \ \wedge \ \big(\forall s' \in S\big)\big(s \preccurlyeq s'\big)$$

Napomena.

Najveći element skupa S (maksimum skupa S) je onaj element $s \in S$ (ako postoji) s kojim su usporedivi svi elementi skupa S, tj.

$$s = \max S \overset{\text{def}}{\iff} s \in S \ \wedge \ \big(\forall s' \in S\big)\big(s' \preccurlyeq s\big)$$

Neka je $\left(X, \preccurlyeq\right)$ parcijalno uređen skup i $S \subseteq X$.

Kažemo da je $a \in S$ **maksimalni element** skupa S ako vrijedi

$$\left(a' \in S \ \wedge \ a \preccurlyeq a'\right) \Rightarrow a' = a.$$

Kažemo da je $a \in S$ **minimalni element** skupa S ako vrijedi

$$\left(a' \in S \ \wedge \ a' \preccurlyeq a\right) \Rightarrow a' = a.$$

Napomena.

Treba razlikovati najveći element od maksimalnog elementa i najmanji element od minimalnog elementa.

Najveći element je onaj element s kojim su svi usporedivi, dok je maksimalni element onaj element od kojeg nema većeg, ali ne moraju svi elementi zadanog skupa biti usporedivi s njim. Odavde odmah zaključujemo da je svaki najveći element ujedno i maksimalni, ali obrnuto ne vrijedi.

Slično, najmanji element je onaj element koji je usporediv sa svima, dok je minimalni element onaj element od kojeg nema manjeg, ali ne mora on biti usporediv sa svim elementima zadanog skupa. Odavde odmah zaključujemo da je svaki najmanji element ujedno i minimalni, ali obrnuto ne vrijedi.

Primjer 3.30.

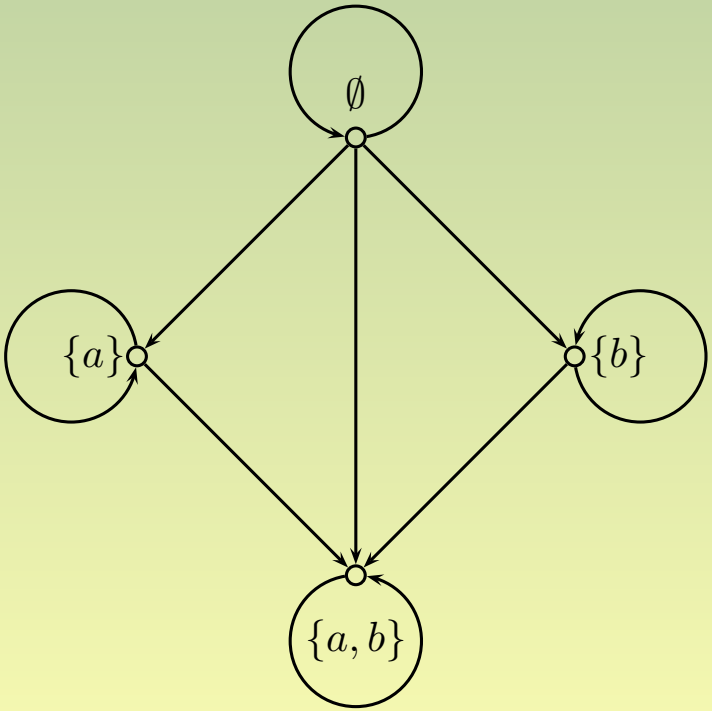
Zadan je parcijalno uređen skup $\big(\mathcal{P}(\{a,b\}),\subseteq\big)$. *Nacrtajte graf relacije* $\subseteq$ *i ispitajte postojanje najvećeg, najmanjeg, maksimalnog i minimalnog elementa u skupu* B *ako je*

(a) $B=\{\{a\}\}$, *(b)* $B=\{\{a\},\{b\}\}$, *(c)* $B=\{\emptyset,\{a\}\}$

Primjer 3.30.

Zadan je parcijalno uređen skup $\big(\mathcal{P}(\{a,b\}), \subseteq\big)$. *Nacrtajte graf relacije* $\subseteq$ *i ispitajte postojanje najvećeg, najmanjeg, maksimalnog i minimalnog elementa u skupu* B *ako je*
(a) $B = \{\{a\}\}$, *(b)* $B = \{\{a\}, \{b\}\}$, *(c)* $B = \{\emptyset, \{a\}\}$

Rješenje.



(a) Kako skup B ima samo jedan element $\{a\}$, onda je taj element najveći i najmanji element skupa B jer je usporediv sa svima (tj., usporediv je sam sa sobom), a nema niti manjeg niti većeg od njega u skupu B jer je on jedini element skupa B. Isto tako on je maksimalni i minimalni element skupa B jer nema većeg niti manjeg elementa od njega u skupu B.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

(a) Kako skup B ima samo jedan element $\{a\}$, onda je taj element najveći i najmanji element skupa B jer je usporediv sa svima (tj., usporediv je sam sa sobom), a nema niti manjeg niti većeg od njega u skupu B jer je on jedini element skupa B. Isto tako on je maksimalni i minimalni element skupa B jer nema većeg niti manjeg elementa od njega u skupu B.

(b) Skup B nema najveći niti najmanji element. Naime, skup B ima dva elementa $\{a\}$ i $\{b\}$ koji nisu međusobno usporedivi, a po definiciji najveći i najmanji element mora biti usporediv sa svima. Međutim, elementi $\{a\}$ i $\{b\}$ su maksimalni elementi skupa B jer nema većih od njih u skupu B. Isto tako, elementi $\{a\}$ i $\{b\}$ su minimalni elementi skupa B jer nema manjih od njih u skupu B.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

(c) Skup B ima dva elementa $\emptyset$ i $\{a\}$. Ta dva elementa jesu usporediva, tj. vrijedi $\emptyset \subseteq \{a\}$. Stoga je $\emptyset$ najmanji element skupa B pa je ujedno i minimalni element skupa B. Element $\{a\}$ je najveći element skupa B pa je ujedno i maksimalni.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

(c) Skup B ima dva elementa $\emptyset$ i $\{a\}$. Ta dva elementa jesu usporediva, tj. vrijedi $\emptyset \subseteq \{a\}$. Stoga je $\emptyset$ najmanji element skupa B pa je ujedno i minimalni element skupa B. Element $\{a\}$ je najveći element skupa B pa je ujedno i maksimalni.

Iz prethodnog primjera vidimo da u slučaju da je postojao najveći element da je on bio jedinstven, dok maksimalnih elemenata može biti i više. Isto vrijedi za najmanji element i minimalni element. Tako nešto vrijedi u bilo kojem parcijalno uređenom skupu.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Propozicija 3.8.

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ parcijalno uređen skup, a $S \subseteq X$. Ukoliko postoje $\inf S$ i $\sup S$, tada su oni jedinstveni.

Dokaz.

Pretpostavimo da je $x_1 = \inf S$ i $x_2 = \inf S$. Iz definicije infimuma slijedi da mora biti $x_1 \preccurlyeq x_2$ (jer je $x_2 = \inf S$) i $x_2 \preccurlyeq x_1$ (jer je $x_1 = \inf S$). Sada zbog antisimetričnosti relacije $\preccurlyeq$ slijedi

$$x_1 \preccurlyeq x_2 \quad \text{i} \quad x_2 \preccurlyeq x_1 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Sasvim analogno se dokaže da je i supremum jedinstven ukoliko postoji. ♡

Korolar 3.1.

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ parcijalno uređen skup, a $S \subseteq X$. Ukoliko postoje $\min S$ i $\max S$, tada su oni jedinstveni.

Napomena.

U parcijalno uređenom skupu su najmanji i najveći element jedinstveni (ukoliko postoje), dok minimalnih i maksimalnih elemenata može biti i više.

Ukoliko skup ima najmanji element, tada je minimalni element jedinstveno određen i jednak je najmanjem elementu.

Isto tako, ukoliko postoji najveći element, tada je maksimalni element jedinstveno određen i jednak je najvećem elementu.

Linearni i dobar uređaj

Za parcijalno uređen skup $(X, \preccurlyeq)$ kažemo da je **totalno** ili **linearno** uređen ako vrijedi

$$(\forall x, y \in X)(x \preccurlyeq y \ \vee \ y \preccurlyeq x),$$

tj. svaka dva elementa se mogu usporediti. Još se kaže u tom slučaju da je X **lanac**.

PARCIJALNI UREĐAJ	$+$	STROGA KOMPLETNOST	$=$	LINEARNI UREĐAJ

Kažemo da je $(X, \preccurlyeq)$ **dobro uređen** skup ako je $(X, \preccurlyeq)$ linearno uređen i ako svaki neprazni podskup od X ima najmanji element.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Napomena.

U linearno uređenom skupu najmanji i minimalni element su ekvivalentni pojmovi i isto tako, najveći i maksimalni element su ekvivalentni pojmovi.

Teorem 3.5 (Teorem o dobrom uređaju).

Svaki skup se može dobro urediti.

Teorem 3.6 (Mat. indukcija i dobar uređaj na $\mathbb{N}$).

Princip matematičke indukcije i princip dobrog uređaja su ekvivalentni pojmovi na skupu prirodnih brojeva $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

Dokaz.

matematička indukcija $\Rightarrow$ dobar uređaj

Dokažimo prvo da svaki neprazni konačni podskup od $\mathbb{N}$ ima najmanji element. Dokaz provodimo indukcijom po broju elemenata. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Skup od jednog elementa ima najmanji element i to je upravo baš taj element (zbog refleksivnosti relacije $\leqslant$). Isto tako, očito je da za $n = 2$ tvrdnja isto vrijedi. Naime, ako je $S = \{a, b\}$, tada zbog linearnosti uređaja vrijedi ili $a \leqslant b$ pa je a najmanji element u S, ili $b \leqslant a$ pa je b najmanji element u S.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pretpostavimo da bilo koji neprazni podskup od n elemenata u $\mathbb{N}$ ima najmanji element. Neka je S neprazni podskup od $\mathbb{N}$ koji ima $n+1$ elemenata. Izbacimo li iz tog skupa jedan element, na primjer element a, tada preostali skup ima n elemenata koji onda prema pretpostavci indukcije ima najmanji element b. Tada je manji od brojeva a i b najmanji element skupa S. Prema principu matematičke indukcije slijedi da svaki neprazni konačni podskup od $\mathbb{N}$ ima najmanji element.

Neka je sada S beskonačni podskup od $\mathbb{N}$. Tvrdimo da on ima najmanji element. Neka je $a \in S$ bilo koji. Definiramo skup

$$S_1 = \{s \in S : s \leqslant a\}.$$

Tada je S_1 konačan skup i $S_1 \neq \emptyset$ jer je sigurno $a \in S_1$. Prema dokazanom skup S_1 ima najmanji element koji je ujedno i najmanji element skupa S.

Dakle, dokazali smo, koristeći se principom matematičke indukcije, da svaki neprazni podskup u $\mathbb{N}$ ima najmanji element. Stoga princip matematičke indukcije povlači princip dobrog uređaja na $\mathbb{N}$. Dokažimo da vrijedi i obrnuto.

dobar uređaj $\Rightarrow$ matematička indukcija

Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

(i) $P(n)$ je istinita za $n = n_0$

(ii) Ako je $P(n)$ istinita za neki prirodni broj $k \geqslant n_0$, tada je $P(n)$ istinita i za $n = k + 1$.

Želimo dokazati, koristeći se principom dobrog uređaja, da je tada $P(n)$ istinita za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da $P(n)$ nije istinita za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$. Neka je S skup svih takvih prirodnih brojeva za koje tvrdnja P nije istinita.

Prema pretpostavci je $S \neq \emptyset$, pa prema principu dobrog uređaja, S ima najmanji element a. Zbog (i) je $a \neq n_0$ (jer tvrdnja vrijedi za $n = n_0$).

Stoga je $a > n_0$, pa je $a - 1 \geqslant n_0$. Isto tako je $a - 1 < a$, a kako je a najmanji element za koji tvrdnja ne vrijedi, tada je tvrdnja P istinita za $k = a - 1$. Tada prema (ii) slijedi da je P istinita i za $k = a$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je $a \in S$. Iz toga slijedi da mora biti tvrdnja P istinita za svaki prirodni broj $n \geqslant n_0$.

Dakle, dokazali smo da i princip dobrog uređaja na $(\mathbb{N}, \leqslant)$ povlači princip matematičke indukcije. ♡

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Napomena.

Poopćenje principa matematičke indukcije na skupu $(\mathbb{N}, \leqslant)$ je **princip transfinitne indukcije** na bilo koji dobro uređeni skup. Bez da previše ulazimo u detalje, objasnimo to na jednom jednostavnom primjeru. Pogledajmo dobar uređaj na skupu $\mathbb{N}$

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots, 1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots$$

gdje je svaki parni broj manji od svakog neparnog, a uređaj između brojeva iste parnosti je standardan (uvjerite se da je to dobar uređaj na $\mathbb{N}$). Uz takav dobar uređaj na $\mathbb{N}$ ne vrijedi princip matematičke indukcije. U čemu je problem?

Uz standardni uređaj skup $\mathbb{N}$ se sastoji od "jednog komada", tj. jedino broj 1 nema neposrednog prethodnika, a svaki drugi broj ima neposrednog prethodnika. Isto tako svaki broj ima neposrednog sljedbenika (to vrijedi za bilo koji dobro uređeni skup). Princip matematičke indukcije tada kaže da ako tvrdnja vrijedi za broj 1, te ako iz pretpostavke da vrijedi za neki prirodni broj da tada vrijedi i za njegov sljedbenik, možemo u tom slučaju zaključiti da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj. Što je intuitivno i jasno jer krenemo li od jedinice i "skačemo" li sa svakog broja na njegov sljedbenik, na taj ćemo način pokupiti sve prirodne brojeve.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

U čemu je problem sa "skakanjem" ako imamo spomenuti uređaj

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots, 1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots ?$$

Naime, u ovom uređaju skup $\mathbb{N}$ se sastoji od dva "zasebna komada", tj. imamo dva broja koji nemaju neposrednih prethodnika, to su brojevi 1 i 2. Počnemo li "skakanje" od najmanjeg, a to je ovdje broj 2, "skočimo" na njegov neposredni sljedbenik 4, zatim sa 4 "skočimo" na njegov neposredni sljedbenik 6, itd. ovim "skakanjima" nikad nećemo doći na onaj drugi "nivo" koji počinje brojem 1 baš zato jer on nema neposrednog prethodnika s kojeg bismo mogli "skočiti" na njega.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Grubo rečeno, princip transfinitne indukcije nam omogućuje da možemo "skočiti" s jednog na drugi "nivo", dakle u ovom slučaju sa "nivoa" parnih brojeva na "nivo" neparnih brojeva. Matematička indukcija nam to ne omogućuje, ona nam omogućuje samo "skakanje po jednom nivou", dok nam transfinitna indukcija omogućuje i "preskakanje s jednog nivoa na drugi".

Primjeri uređaja

1. $\left(\mathbb{R}, \leqslant\right)$ je linearno uređen skup (svaka dva realna broja se mogu usporediti). $\left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$ je parcijalno uređen skup, ali nije linearno uređen (osim ako je $k(X) = 1$).

2. $X = \{A, B, C, \check{C}, \acute{C}, D, \ldots, \check{Z}\}$ skup slova hrvatske abecede. Stavimo

$$A \prec B \prec C \prec \check{C} \prec \acute{C} \prec D \prec \cdots \prec \check{Z}.$$

   Tada je $\left(X, \preccurlyeq\right)$ linearno uređen skup.

3. $X = \mathbb{R}, \quad S = \langle 0, 1\rangle$
   $\inf S = 0, \quad \min S$ ne postoji
   $\sup S = 1, \quad \max S$ ne postoji

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

4. $X = \mathbb{R}, \quad S = [0, 1\rangle$
   $\inf S = 0, \quad \min S = 0$
   $\sup S = 1, \quad \max S$ ne postoji

5. $X = \mathbb{R}, \quad S = [0, 1]$
   $\inf S = 0, \quad \min S = 0$
   $\sup S = 1, \quad \max S = 1$

6. $X = \mathbb{R}, \quad S = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
   $\inf S = 1, \quad \min S$ ne postoji
   $\sup S = 2, \quad \max S = 2$

7. $X = \mathbb{R}, \quad S = \langle 1, +\infty\rangle$
   $\inf S = 1, \quad \min S$ ne postoji
   $\sup S$ ne postoji, $\quad \max S$ ne postoji

8. $X = \mathbb{R}, \quad S = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$

   Znamo da je niz $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ strogo rastući i da je omeđen i $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = e$.

   $\inf S = 2, \quad \min S = 2$

   $\sup S = e, \quad \max S$ ne postoji

9. $X = \mathbb{Q}, \quad S = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad S \subseteq \mathbb{Q}$

   $\inf S = 2, \quad \min S = 2$

   $\sup S$ ne postoji jer $e \notin \mathbb{Q}$

   $\max S$ ne postoji

   Skup S ima gornjih međa u $\mathbb{Q}$, ali najmanja gornja međa nije element skupa $\mathbb{Q}$ pa skup S nema supremum u $\mathbb{Q}$.

Napomena.

Svaki neprazni i omeđen podskup skupa $\mathbb{R}$ ima infimum i supremum (aksiom). Zato se za $\mathbb{R}$ kaže da je **potpuno uređeno polje**. Skup $\mathbb{Q}$ nije potpuno uređeno polje.

10. $X = \{1, 2, 3\}, \quad \big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$

$$\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\big\}$$

$$\inf \mathcal{P}(X) = \emptyset, \qquad \min \mathcal{P}(X) = \emptyset$$

$$\sup \mathcal{P}(X) = X, \quad \max \mathcal{P}(X) = X$$

Jedini minimalni element od $\mathcal{P}(X)$ je $\emptyset$.

Jedini maksimalni element od $\mathcal{P}(X)$ je X.

$$S_1 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}, \quad S_1 \subseteq \mathcal{P}(X)$$

$$\inf S_1 = \emptyset, \qquad \min S_1 \text{ ne postoji}$$
$$\sup S_1 = X, \qquad \max S_1 \text{ ne postoji}$$

Minimalni elementi skupa S_1 su $\{2\}$ i $\{1,3\}$.
Maksimalni elementi skupa S_1 su $\{1,2\}$ i $\{1,3\}$.

Dakle, ovdje uočavamo da je $\{1,3\}$ minimalni i maksimalni element u skupu S_1, što znači da nema elementa u skupu S_1 kojeg bi $\{1,3\}$ sadržavao, ali isto tako ni nema elementa u S_1 koji bi sadržavao $\{1,3\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$S_1 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}, \quad S_1 \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

$\inf S_1$ ne postoji, $\quad \min S_1$ ne postoji

$\sup S_1 = X, \quad \max S_1$ ne postoji

S_1 nema infimum u skupu $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

S_1 čak nema niti jednu donju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ pa je skup S_1 odozdo neomeđen u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

$S_1 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}, \quad S_1 \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

$\inf S_1$ ne postoji, $\quad \sup S_1$ ne postoji

S_1 nema infimum niti supremum u skupu $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$.

S_1 čak nema niti jednu donju, a niti gornju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ pa je skup S_1 odozdo i odozgo neomeđen u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$$S_2 = \{\{2\}, \{1,2\}\}, \quad S_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$$

$$\inf S_2 = \{2\}, \qquad \min S_2 = \{2\}$$
$$\sup S_2 = \{1,2\}, \quad \max S_2 = \{1,2\}$$

Minimalni element u S_2 je $\{2\}$, a maksimalni element je $\{1,2\}$.

$\emptyset$ je donja međa skupa S_2, ali $\emptyset$ nije najveća donja međa skupa S_2 u $\mathcal{P}(X)$.

X je gornja međa skupa S_2, ali X nije najmanja gornja međa skupa S_2 u $\mathcal{P}(X)$.

$$S_2 = \{\{2\}, \{1,2\}\}, \quad S_2 \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$$

$$\inf S_2 = \{2\}, \qquad \min S_2 = \{2\}$$
$$\sup S_2 = \{1,2\}, \quad \max S_2 = \{1,2\}$$

Jedina razlika je ovdje što skup S_2 osim $\{1,2\}$ nema drugih gornjih međa u skupu $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$.

$S_3 = \{\{3\}, \{1,2\}\}, \quad S_3 \subseteq \mathcal{P}(X)$

$\inf S_3 = \emptyset, \quad \min S_3$ ne postoji

$\sup S_3 = X, \quad \max S_3$ ne postoji

Minimalni elementi u skupu S_3 su $\{3\}$ i $\{1,2\}$.

Maksimalni elementi u skupu S_3 su $\{3\}$ i $\{1,2\}$.

$S_3 = \{\{3\}, \{1,2\}\}, \quad S_3 \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$

$\inf S_3 = \emptyset$

$\sup S_3$ ne postoji u $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$

$S_3 = \{\{3\}, \{1,2\}\}, \quad S_3 \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

$\inf S_3$ ne postoji u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

$\sup S_3$ ne postoji u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$$S_4 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}, \quad S_4 \subseteq \mathcal{P}(X)$$

$\inf S_4 = \emptyset$, $\min S_4$ ne postoji

$\sup S_4 = X$, $\max S_4$ ne postoji

Minimalni elementi u S_4 su

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}.$$

Maksimalni elementi u S_4 su

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}.$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

11. $(\mathbb{N}, \leqslant)$ je dobro uređen skup. U dobro uređenom skupu svaki njegov neprazni podskup ima najmanji element.

$$\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \exists \min S$$

U dobro uređenom skupu ne mora svaki njegov podskup imati najveći element.

$S = \{2, 4, 6, \dots\} = 2\mathbb{N}$
$\inf S = \min S = 2$
$\sup S$ ne postoji; $\max S$ ne postoji

12. $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ je dobro uređen skup, gdje je $\preccurlyeq$ definirano s

$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots, 1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots$$

Svaki parni broj je manji od svakog neparnog broja, a uređaj između brojeva iste parnosti je standardan.
Na primjer,

$$6 \preccurlyeq 1, \quad 8 \preccurlyeq 10, \quad 8 \preccurlyeq 7, \quad 15 \preccurlyeq 25, \quad 38 \preccurlyeq 1, \quad 38 \preccurlyeq 3, \quad 2 \preccurlyeq 38$$

Brojevi 2 i 1 nemaju neposrednih prethodnika, ali svatko ima neposrednog sljedbenika. Na primjer

$$S = 2\mathbb{N} \cup \{1\} = \{1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$$
$$\min S = 2, \quad \max S = 1$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

13. $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ je dobro uređen skup, gdje je $\preccurlyeq$ definirano s

$$\underbrace{3, 6, 9, \ldots}_{\text{brojevi djeljivi s 3}}, \underbrace{1, 4, 7, 10, 13, \ldots}_{\text{pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1}}, \underbrace{2, 5, 8, 11, 14, \ldots}_{\text{pri dijeljenju s 3 daju ostatak 2}}$$

Na primjer,

$$3 \preccurlyeq 6, \quad 12 \preccurlyeq 1, \quad 27 \preccurlyeq 4, \quad 10 \preccurlyeq 14$$

Brojevi 3, 1 i 2 nemaju neposrednih prethodnika, ali svatko ima neposrednog sljedbenika. Na primjer

$$S = \{1, 2, 9, 16\}$$
$$\min S = 9, \quad \max S = 2$$

14. $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ nije dobro uređen skup jer, npr. podskup

$$\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$$

nema najmanji element. Međutim, znamo da se svaki skup može dobro urediti. Jedan dobar uređaj na $\mathbb{Z}$ je

$$-1, -2, -3, -4, \dots, 1, 2, 3, 4, \dots$$

gdje su brojevi napisani u rastućem poretku.
Drugi dobar uređaj na $\mathbb{Z}$ je

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$$

gdje su brojevi napisani u rastućem poretku.
Smislite još neke dobre uređaje na $\mathbb{Z}$.

15. $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ nije dobro uređen skup jer, npr. podskup

$$\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

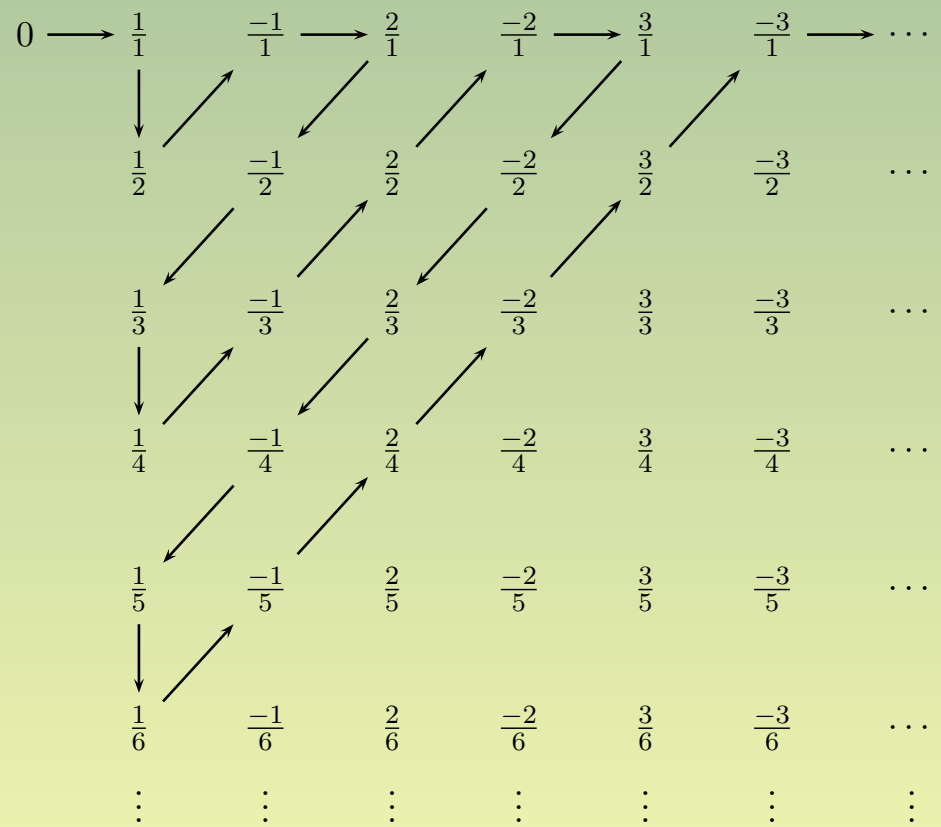
nema najmanji element.

Navedite još neke podskupove od $\mathbb{Q}$ koji nemaju najmanji element.

Međutim, skup $\mathbb{Q}$ je prebrojiv pa nađemo li bar jednu bijekciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, tada će dobar uređaj na $\mathbb{Q}$ biti induciran tom bijekcijom pomoću standardnog dobrog uređaja na $\mathbb{N}$ (ili bilo kojeg drugog dobrog uređaja na $\mathbb{N}$), tj. definiramo

$$\frac{m_1}{n_1} \preccurlyeq \frac{m_2}{n_2} \overset{\text{def}}{\iff} f^{-1}\left(\frac{m_1}{n_1}\right) \preccurlyeq f^{-1}\left(\frac{m_2}{n_2}\right)$$

Za različite bijekcije f i različite izbore dobrih uređaja na $\mathbb{N}$ dobivamo dobre uređaje na $\mathbb{Q}$. Evo jednog primjera dobrog uređaja na $\mathbb{Q}$.



$$0, 1, \frac{1}{2}, -1, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, -2, 3, \frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -3, \ldots$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Zadatak 3.8.

Konstruirajte još neke dobre uređaje na skupu $\mathbb{Q}$.

Napomena.

Na potpuno isti način se može konstruirati dobar uređaj na bilo kojem prebrojivom skupu X.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

16. $(\mathbb{R}, \leqslant)$ nije dobro uređen skup jer, npr. podskup $\langle 0, 1]$ nema najmanji element.

Navedite još neke podskupove od $\mathbb{R}$ koji nemaju najmanji element.

Znamo da se svaki skup može dobro urediti pa se stoga i skup $\mathbb{R}$ može dobro urediti. Međutim, problem je u tome što još nije poznat niti jedan dobar uređaj na $\mathbb{R}$, tj. nemamo algoritam pomoću kojeg bismo skup $\mathbb{R}$ dobro uredili (problem je što je skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv). Dakle, postoji dobar uređaj na $\mathbb{R}$, ali ne znamo kako doći do njega.

Primjer 3.31.

Neka je $X = \{a, b, c\}$. *Skup* $\left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$ *nije dobro uređen skup (čak nije niti linearno uređen). Pronađite dva dobra uređaja na* $\mathcal{P}(X)$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.31.

Neka je $X = \{a, b, c\}$. Skup $\left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$ nije dobro uređen skup (čak nije niti linearno uređen). Pronađite dva dobra uređaja na $\mathcal{P}(X)$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(X) = \left\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\right\}$$

$$\emptyset \preccurlyeq_1 \{a\} \preccurlyeq_1 \{b\} \preccurlyeq_1 \{c\} \preccurlyeq_1 \{a, b\} \preccurlyeq_1 \{a, c\} \preccurlyeq_1 \{b, c\} \preccurlyeq_1 X$$

$$\{b\} \preccurlyeq_2 \{a, b\} \preccurlyeq_2 \{c\} \preccurlyeq_2 \emptyset \preccurlyeq_2 \{a, c\} \preccurlyeq_2 X \preccurlyeq_2 \{b, c\} \preccurlyeq_2 \{a\}$$

Primjer 3.31.

Neka je $X = \{a, b, c\}$. Skup $\left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$ nije dobro uređen skup (čak nije niti linearno uređen). Pronađite dva dobra uređaja na $\mathcal{P}(X)$.

Rješenje.

$$\mathcal{P}(X) = \left\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\right\}$$

$$\emptyset \preccurlyeq_1 \{a\} \preccurlyeq_1 \{b\} \preccurlyeq_1 \{c\} \preccurlyeq_1 \{a, b\} \preccurlyeq_1 \{a, c\} \preccurlyeq_1 \{b, c\} \preccurlyeq_1 X$$

$$\{b\} \preccurlyeq_2 \{a, b\} \preccurlyeq_2 \{c\} \preccurlyeq_2 \emptyset \preccurlyeq_2 \{a, c\} \preccurlyeq_2 X \preccurlyeq_2 \{b, c\} \preccurlyeq_2 \{a\}$$

Napomena.

Svaki linearni uređaj na konačnom skupu je dobar uređaj.

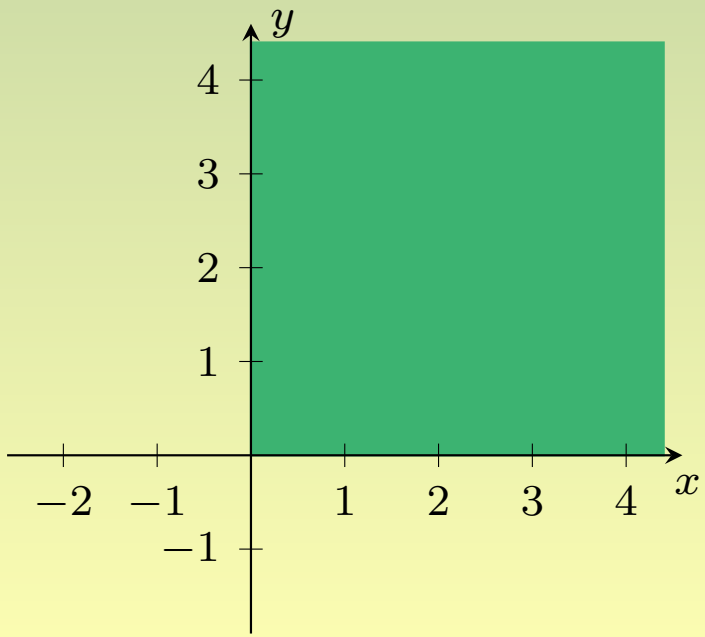
Uređaji na kartezijevom produktu skupova

Neka su $\left(X_1, \preccurlyeq_1\right)$ i $\left(X_2, \preccurlyeq_2\right)$ parcijalno uređeni skupovi. Na skupu $X_1 \times X_2$ definiramo parcijalni uređaj $\preccurlyeq$ sa

$$(a_1, a_2) \preccurlyeq (b_1, b_2) \overset{\text{def}}{\iff} a_1 \preccurlyeq_1 b_1 \quad \wedge \quad a_2 \preccurlyeq_2 b_2$$

Primjer 3.32.

Skup svih točaka u ravnini $\mathbb{R}^2$ koje su $\succcurlyeq (0,0)$ jednak je prvom kvadrantu.



Napomena.

Čak i u slučaju da su $\preccurlyeq_1$ i $\preccurlyeq_2$ linearni uređaji na X_1 odnosno X_2, $\preccurlyeq$ ne mora biti linearni uređaj na $X_1 \times X_2$. Na primjer, ako je $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, $\preccurlyeq_1 = \preccurlyeq_2 = \leqslant$ standardni uređaj na $\mathbb{R}$, tada elementi $(1,2), (3,1) \in \mathbb{R}^2$ nisu usporedivi.

$$(1,2) \preccurlyeq (3,1) \;\Leftrightarrow\; 1 \leqslant 3 \;\wedge\; \underbrace{2 \leqslant 1}_{\text{laž}}$$

$$(3,1) \preccurlyeq (1,2) \;\Leftrightarrow\; \underbrace{3 \leqslant 1}_{\text{laž}} \;\wedge\; 1 \leqslant 2$$

Neka su $\left(X_i, \preccurlyeq_i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ parcijalno uređeni skupovi. Na skupu $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ definiramo parcijalni uređaj $\preccurlyeq$ sa

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \preccurlyeq (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{def}}{\iff}$$
$$a_1 \preccurlyeq_1 b_1 \quad \wedge \quad a_2 \preccurlyeq_2 b_2 \quad \wedge \cdots \wedge \quad a_n \preccurlyeq_n b_n$$

Čak i u slučaju da su svi $\preccurlyeq_i$ linearni uređaji, $\preccurlyeq$ ne mora biti linearni uređaj na $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

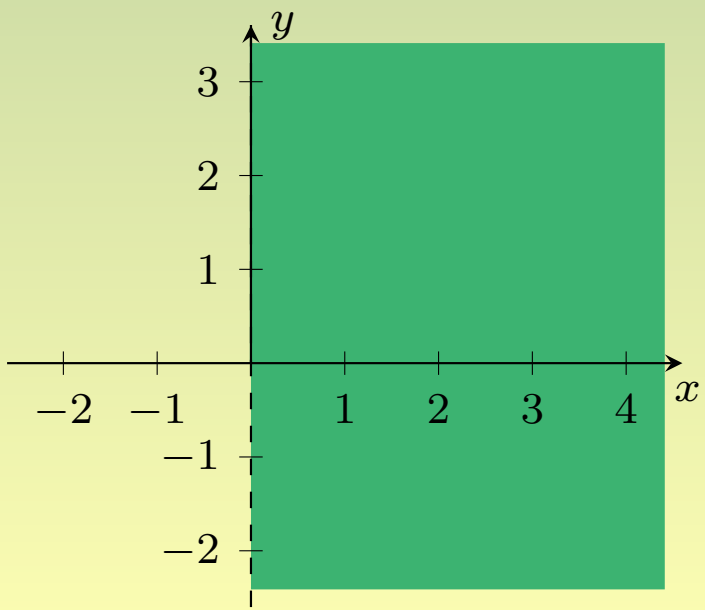
Neka su $\left(X_1, \preccurlyeq_1\right)$ i $\left(X_2, \preccurlyeq_2\right)$ parcijalno uređeni skupovi. Na skupu $X_1 \times X_2$ definiramo parcijalni uređaj $\preccurlyeq_l$ sa

$$(a_1, a_2) \preccurlyeq_l (b_1, b_2) \overset{\text{def}}{\iff} a_1 \prec_1 b_1 \quad \vee \quad \left(a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 \preccurlyeq_2 b_2\right)$$

kojeg zovemo **leksikografski uređaj** na $X_1 \times X_2$.

Primjer 3.33.

Skup svih točaka u ravnini $\mathbb{R}^2$ koje su $\succcurlyeq_l (0,0)$ jednak je desnoj poluravnini bez negativnog dijela y-osi.



Napomena.

U slučaju da su $\preccurlyeq_1$ i $\preccurlyeq_2$ linearni uređaji na X_1 odnosno X_2, tada je i $\preccurlyeq_l$ linearni uređaj na $X_1 \times X_2$. Uzmimo opet $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, $\preccurlyeq_1 = \preccurlyeq_2 = \leqslant$ standardni uređaj na $\mathbb{R}$, tada su elementi $(1,2), (3,1) \in \mathbb{R}^2$ usporedivi.

$$(1,2) \preccurlyeq_l (3,1) \quad \text{jer je} \quad 1 < 3$$

Isto tako je

$$(1,2) \preccurlyeq_l (1,5) \quad \text{jer je} \quad 1 = 1 \quad \wedge \quad 2 < 5$$

Neka su $\left(X_i, \preccurlyeq_i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ parcijalno uređeni skupovi. Na skupu $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ definiramo parcijalni uređaj $\preccurlyeq_l$ sa

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \preccurlyeq_l (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{def}}{\iff}$$
$$(a_1 \prec_1 b_1) \vee (a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 \prec_2 b_2) \vee (a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 = b_2 \ \wedge \ a_3 \prec_3 b_3)$$
$$\vee \cdots \vee (a_1 = b_1 \ \wedge \ a_2 = b_2 \ \wedge \cdots \wedge \ a_{n-1} = b_{n-1} \ \wedge \ a_n \preccurlyeq_n b_n)$$

kojeg zovemo **leksikografski uređaj** na $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

U slučaju da su svi $\preccurlyeq_i$ linearni uređaji, $\preccurlyeq_l$ je linearni uređaj na $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.34 (Riječi hrvatskog jezika).

Neka je $X = \{A, B, C, \check{C}, \acute{C}, D, \ldots, \check{Z}\}$ skup svih slova hrvatske abecede. Tada je, npr.

$$X^4 = X \times X \times X \times X$$

skup svih riječi (smislenih i besmislenih) od četiri slova. Na skupu X imamo linearni uređaj $\preccurlyeq$ zadan s

$$A \prec B \prec C \prec \check{C} \prec \acute{C} \prec \cdots \prec \check{Z}.$$

Na X^4 imamo leksikografski uređaj $\preccurlyeq_l$.
Na riječ od četiri slova možemo gledati kao na uređenu četvorku slova. Na primjer,

$$ELLA \rightsquigarrow (E, L, L, A)$$

$$\text{TINA}, \text{ELLA}, \text{MAJA}, \text{KATA}, \text{TONI}, \text{TOMI}, \text{TATA}, \text{MAMA} \in X^4$$

$$\text{ELLA} \prec_l \text{KATA} \prec_l \text{MAJA} \prec_l \text{MAMA} \prec_l \text{TATA} \prec_l \text{TOMI} \prec_l \text{TONI}$$

Ako označimo s $\mathcal{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ skup svih riječi (smislenih i besmislenih) koje se mogu dobiti pomoću slova hrvatske abecede, tada na $\mathcal{X}$ imamo leksikografski uređaj $\preccurlyeq_l$ tako da stavimo da je praznina (blank) manja od svih slova pa na taj način možemo uspoređivati riječi različitih duljina. Na primjer,

$$\text{MAJ} \prec_l \text{MAJA} \prec_l \text{VALERIJA} \prec_l \text{ZABOK}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Isto tako, možemo razlikovati velika i mala slova, tj.

$$X = \{A, B, C, \ldots, \check{Z}, a, b, c, \ldots, \check{z}\}.$$

Ako skup X uredimo

$$A \prec B \prec C \prec \cdots \prec \check{Z} \prec a \prec b \prec c \prec \cdots \prec \check{z}$$

tada je, npr.

$$SAn \prec_l San \prec_l sAn \prec_l saN \prec_l san$$

$$Car \prec_l auTO \prec_l auto$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Ako bismo skup X uredili

$$a \prec A \prec b \prec B \prec c \prec C \prec \cdots \prec \check{z} \prec \check{Z}$$

tada je

$$san \prec_l saN \prec_l sAn \prec_l San \prec_l SAn$$

$$auto \prec_l auTO \prec_l Car$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.35 (Kompleksni brojevi).

Znamo da standardni uređaj na skupu $\mathbb{R}$ ne možemo proširiti na skup $\mathbb{C}$ tako da taj uređaj i dalje ostane u skladu s operacijama zbrajanja i množenja kompleksnih brojeva. Naime, pitamo se što je sa brojem $i = \sqrt{-1}$. Da li je $i > 0$ ili je $i < 0$ (jer očito je $i \neq 0$). Kada bi bilo $i > 0$, onda bi (držeći se pravila da je produkt pozitivnih brojeva pozitivan broj) bilo

$$i \cdot i > 0, \text{ tj. } i^2 > 0, \text{ odnosno } -1 > 0$$

što je nemoguće. Kada bi bilo $i < 0$, onda bi trebalo biti $-i > 0$, a tada bi bilo

$$(-i) \cdot (-i) > 0, \text{ tj. } i^2 > 0, \text{ odnosno } -1 > 0$$

što je nemoguće.

Iz toga slijedi da i nije niti pozitivan niti negativan broj. To pokazuje da se u skupu $\mathbb{C}$ ne može uvesti uređaj koji bi bio u skladu sa zbrajanjem i množenjem kompleksnih brojeva. Stoga kažemo da kompleksne brojeve ne možemo uspoređivati po veličini.

Međutim, nije istina da ne možemo uopće uspoređivati kompleksne brojeve. Sjetimo se teorema o dobrom uređaju koji kaže da se svaki skup može dobro urediti, pa onda sigurno postoji i neki uređaj na $\mathbb{C}$ (koji ne mora nužno biti i dobar uređaj), a koji isto tako neće biti u skladu s operacijama zbrajanja i množenja (ali to ovdje nije sada važno, bitno je samo da na neki način možemo uspoređivati kompleksne brojeve).

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Jedan mogući uređaj na skupu $\mathbb{C}$ je leksikografski uređaj.

$$z_1 \preccurlyeq_l z_2 \overset{\text{def}}{\iff} \operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2 \ \vee \ \big(\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \ \wedge \ \operatorname{Im} z_1 \leqslant \operatorname{Im} z_2\big)$$

Na primjer

$$1+i \prec_l 2-2i, \quad 0 \prec_l i, \quad -1+3i \prec_l -1+5i$$

Dakle, u ovom uređaju je i pozitivan kompleksni broj, tj. $i \succ_l 0$. Međutim, $i^2 = -1$, pa je $i^2 \prec_l 0$. Dakle, $\preccurlyeq_l$ nije u skladu s operacijom množenja kompleksnih brojeva (produkt pozitivnih kompleksnih brojeva ne mora biti pozitivan kompleksni broj).

Hasseovi dijagrami

Neka je $(X, \preccurlyeq)$ konačni parcijalno uređen skup. Relaciju $\preccurlyeq$ možemo grafički prikazati u ravnini pomoću Hasseovog dijagrama na sljedeći način.
Sve elemente $x \in X$ prikažemo kao točke u ravnini. Nadalje, kažemo da element y pokriva element x ako je $x \prec y$ i između njih ne postoji niti jedan element $z \in X$, tj. vrijedi

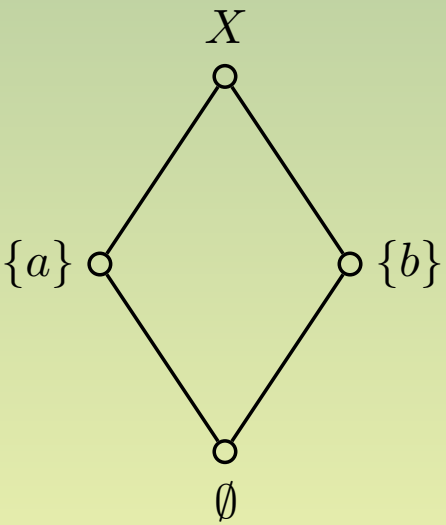
$$x \preccurlyeq z \preccurlyeq y \;\Rightarrow\; z = x \quad \vee \quad z = y.$$

Iz točke x povlačimo spojnicu do svake točke y koja pokriva x. Točke y crtamo iznad vodoravne razine točke x u ravnini. Sa Hasseovim dijagramom je relacija parcijalnog uređaja u potpunosti određena.

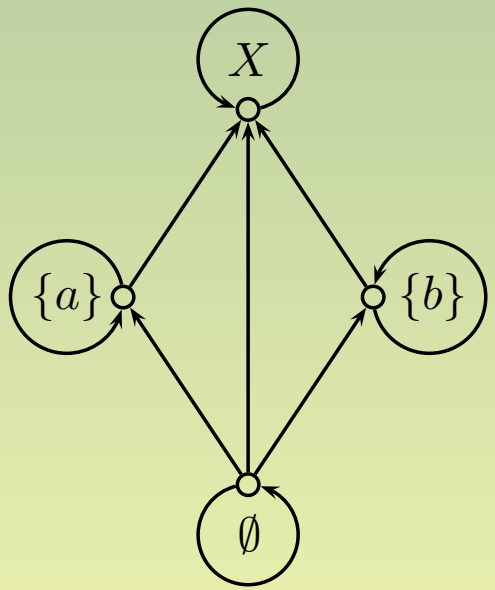
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Ako za bilo koje točke $a, b \in X$ vrijedi $a \prec b$, onda na Hasseovom dijagramu to znači da je točka b iznad vodoravne razine točke a, i od a do b postoji **uzlazna** linija koja ih spaja.

$$X = \{a, b\},\ \left(\mathcal{P}(X), \subseteq\right)$$



Hasseov dijagram



Graf relacije

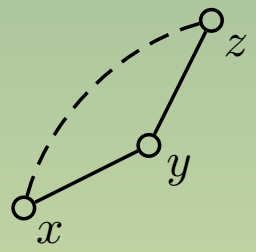
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Napomena.

Hasseov dijagram služi za grafičko predočavanje relacije parcijalnog uređaja na konačnom skupu. Hasseov dijagram je puno jednostavniji od pripadnog grafa relacije zato jer uzima u obzir svojstva koja ima relacija parcijalnog uređaja. Relacija parcijalnog uređaja je refleksivna pa se onda u Hasseovom dijagramu ne crtaju petlje jer znamo da je svaki element u relaciji sam sa sobom $(x \preccurlyeq x,\ \forall x)$. Isto tako, relacija parcijalnog uređaja je tranzitivna, tj.

$$x \preccurlyeq y \quad \wedge \quad y \preccurlyeq z \quad \Rightarrow \quad x \preccurlyeq z$$

pa stoga ako spojimo x sa y i spojimo y sa z, onda ne treba posebno još spajati x sa z.



Dakle, u Hasseovom dijagramu ne smijemo nigdje direktno spojiti početak i kraj bilo koje uzlazne linije koja sadrži više od dva vrha. Isto tako, ne smijemo direktno spojiti dva elementa koji jesu u relaciji ako između njih postoji još neki element, nego onda moramo ubaciti taj element između njih. Još jednom, Hasseovi dijagrami služe samo za grafički prikaz relacije koja je parcijalni uređaj na konačnom skupu.

Primjer 3.36.

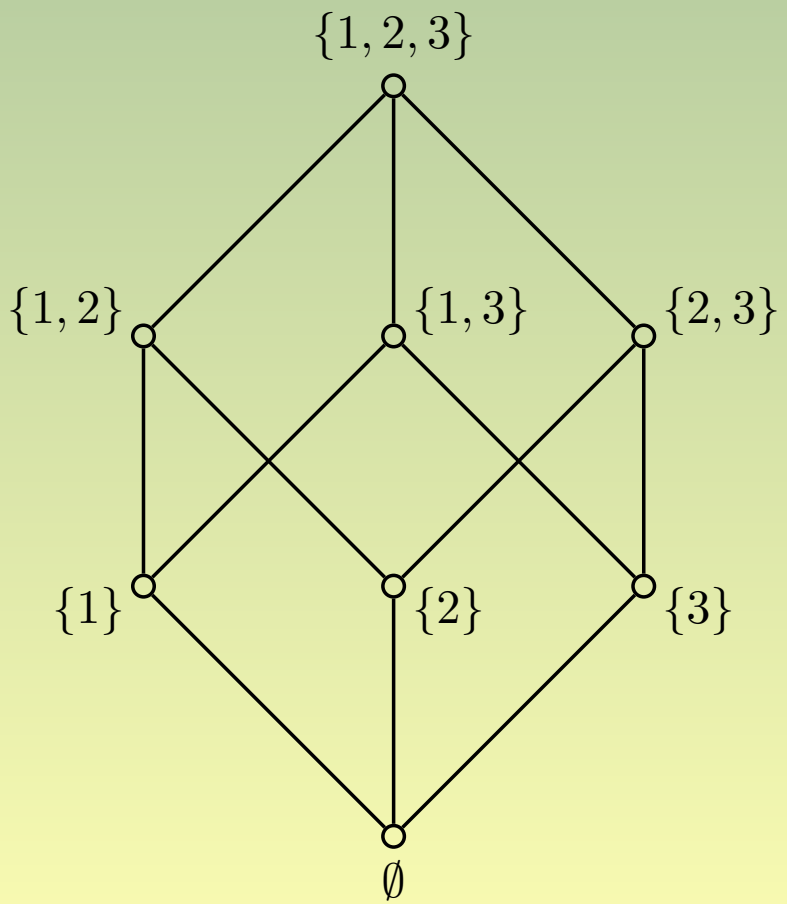
Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$, *gdje je* $X = \{1, 2, 3\}$.

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Primjer 3.36.

Nacrtajte Hasseov dijagram parcijalno uređenog skupa $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$, *gdje je* $X = \{1, 2, 3\}$.

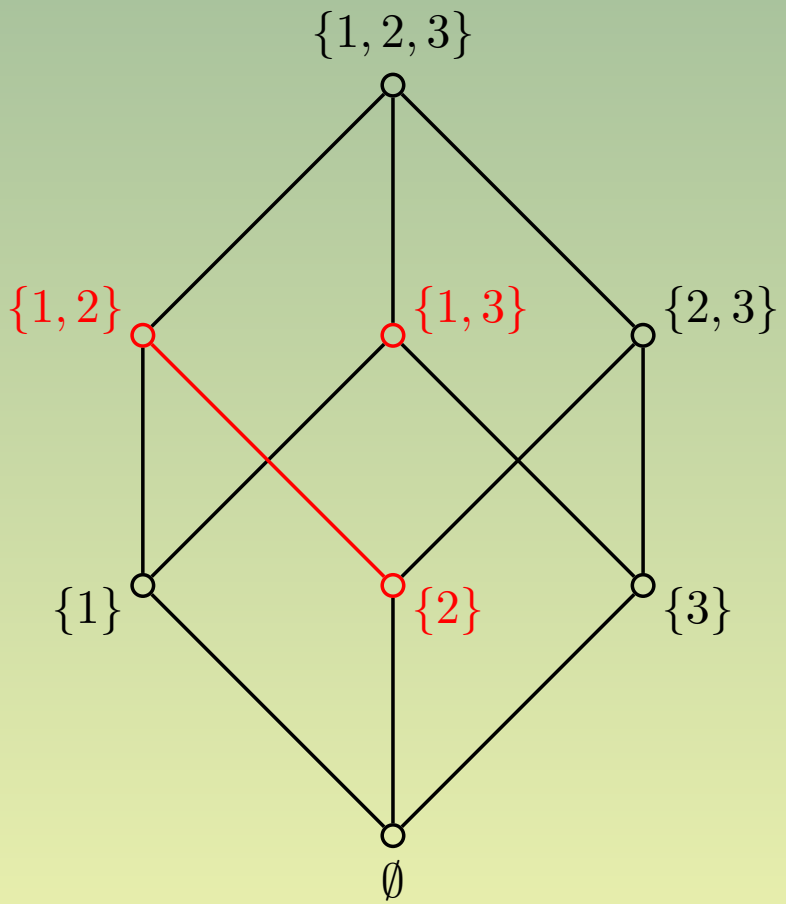
Rješenje.



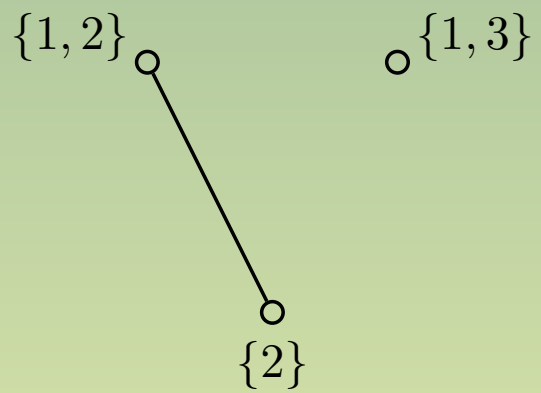
Sa slike lagano vidimo da je $\emptyset$ najmanji element u $\mathcal{P}(X)$ koji je ujedno i jedini minimalni element. Isto tako, $\{1, 2, 3\} = X$ je najveći element skupa $\mathcal{P}(X)$ koji je ujedno i jedini maksimalni element.

Pogledajmo još Hasseove dijagrame nekih podskupova od $\mathcal{P}(X)$.

$$S_1 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



Hasseov dijagram skupa S_1



$\inf S_1 = \emptyset, \qquad \nexists \min S_1$

$\sup S_1 = \{1,2,3\}, \qquad \nexists \max S_1$

Minimalni elementi od S_1:

$\{2\},\ \{1,3\}$

Maksimalni elementi od S_1:

$\{1,2\},\ \{1,3\}$

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

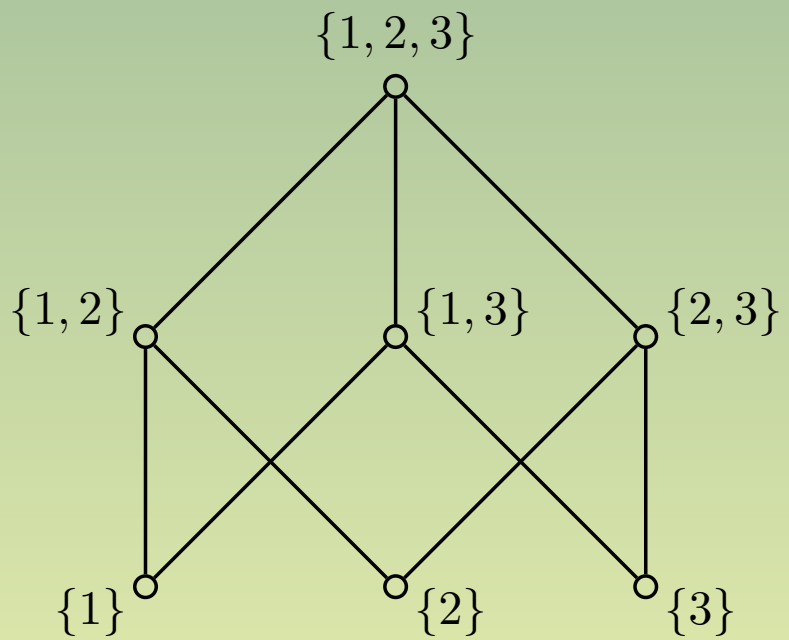
Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

Uređaji na $A \times B$

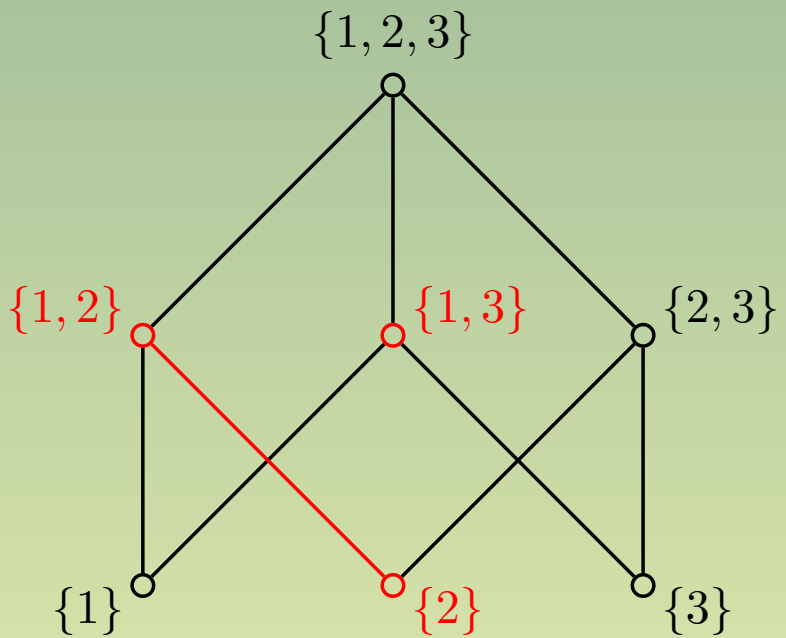
Hasseovi dijagrami

Hasseov dijagram skupa $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

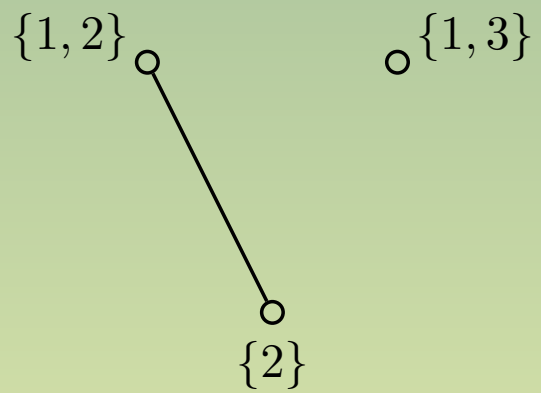


Skup $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ nema najmanji element, ali ima najveći element $\{1, 2, 3\}$ koji je ujedno i jedini njegov maksimalni element.
Minimalni elementi u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ su: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$

$$S_1 = \{\{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$$



Hasseov dijagram skupa S_1



S_1 nema niti jednu donju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$

$$\nexists \inf S_1, \quad \nexists \min S_1,$$
$$\sup S_1 = \{1,2,3\}, \quad \nexists \max S_1$$

Minimalni elementi od S_1:

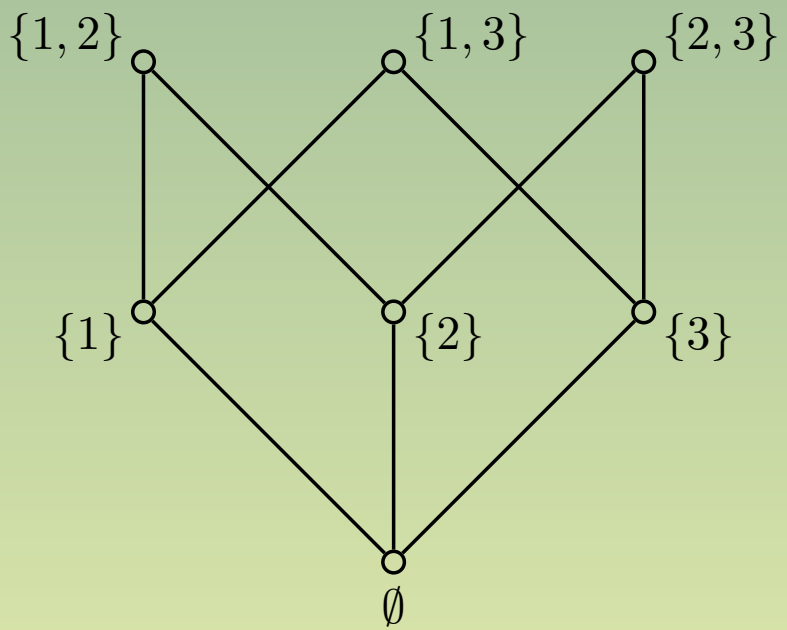
$$\{2\},\ \{1,3\}$$

Maksimalni elementi od S_1:

$$\{1,2\},\ \{1,3\}$$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

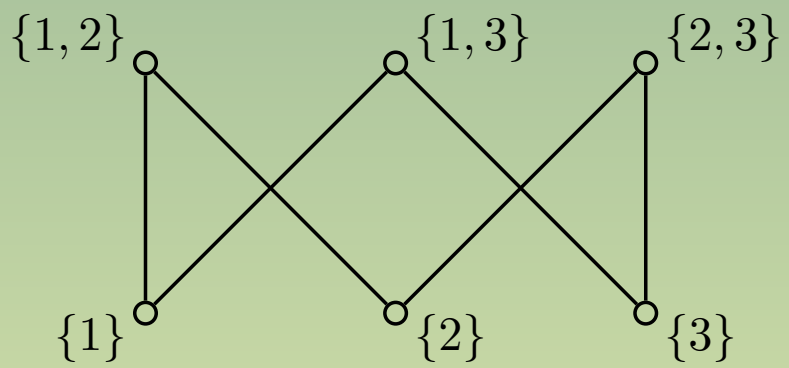
Hasseov dijagram skupa $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$



Skup $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$ nema najveći element, ali ima najmanji element $\emptyset$ koji je ujedno i jedini njegov minimalni element. Maksimalni elementi u $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$ su

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$$

Hasseov dijagram skupa $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$



Skup $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ nema najveći element, niti najmanji element. Minimalni elementi u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ su

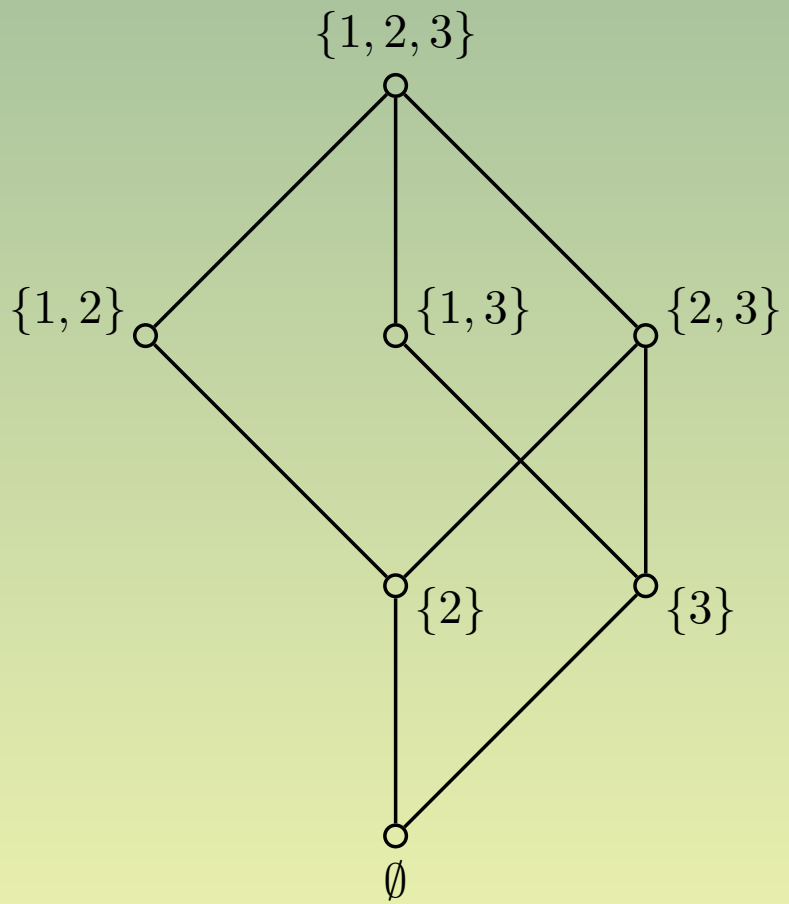
$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\}$$

Maksimalni elementi u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ su

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$$

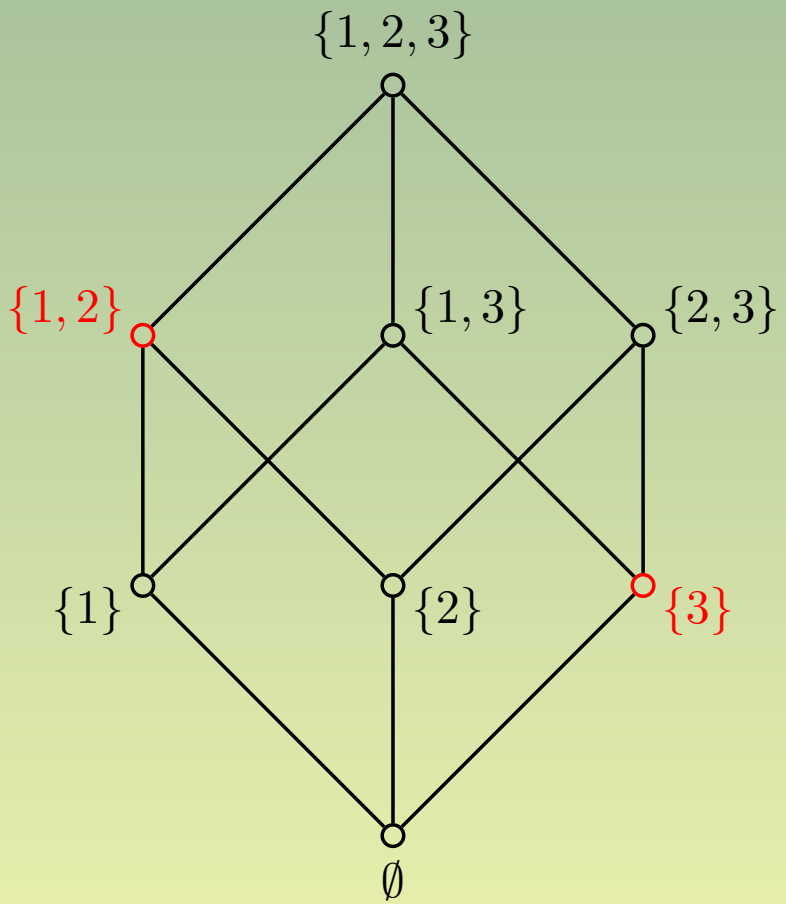
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Hasseov dijagram skupa $\mathcal{P}(X) \setminus \{\{1\}\}$



$\emptyset$ je najmanji element u skupu $\mathcal{P}(X) \setminus \{\{1\}\}$, a $\{1, 2, 3\}$ je najveći element.

$$S_2 = \{\{3\}, \{1,2\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



Hasseov dijagram skupa S_2

$\{1,2\}$ $\quad\quad$ $\{3\}$

$\inf S_2 = \emptyset, \quad \nexists \min S_2$

$\sup S_2 = \{1,2,3\}, \quad \nexists \max S_2$

Minimalni elementi od S_2:

$\{3\},\ \{1,2\}$

Maksimalni elementi od S_2:

$\{3\},\ \{1,2\}$

$\emptyset$ je jedina donja međa skupa S_2 u $\mathcal{P}(X)$

$\{1,2,3\}$ je jedina gornja međa skupa S_2 u $\mathcal{P}(X)$

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

Linearni i dobar uređaj

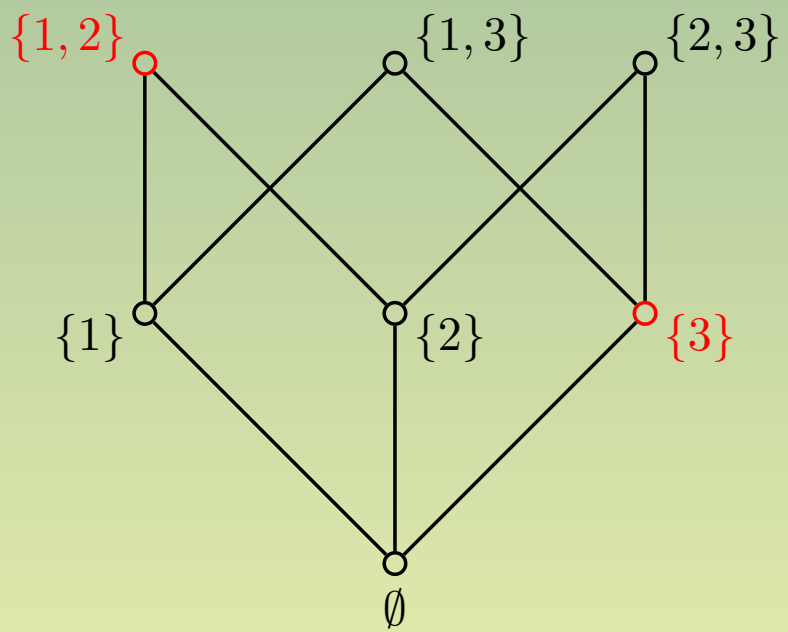
Primjeri uređaja

Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

$$S_2 = \{\{3\}, \{1,2\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$$

Hasseov dijagram skupa S_2



$\{1,2\}$ $\circ$ $\quad$ $\circ$ $\{3\}$

$\inf S_2 = \emptyset, \quad \nexists \min S_2$

$\nexists \sup S_2, \quad \nexists \max S_2$

Minimalni elementi od S_2:

$\{3\},\ \{1,2\}$

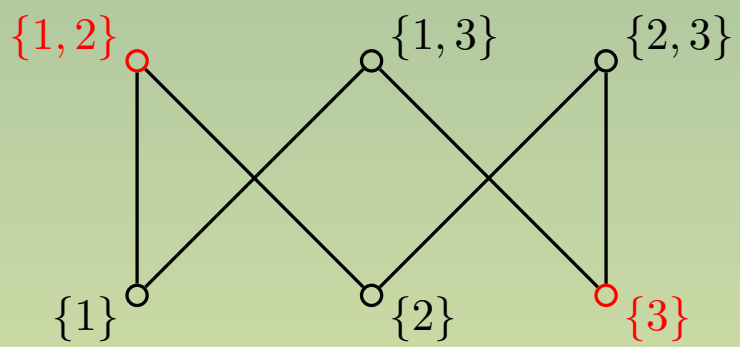
Maksimalni elementi od S_2:

$\{3\},\ \{1,2\}$

$\emptyset$ je jedina donja međa skupa S_2 u $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$

Skup S_2 nema niti jednu gornju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{X\}$

$$S_2 = \{\{3\}, \{1,2\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$$



Skup S_2 nema niti jednu donju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

Skup S_2 nema niti jednu gornju među u $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$

Hasseov dijagram skupa S_2

$\nexists \inf S_2, \quad \nexists \min S_2$

$\nexists \sup S_2, \quad \nexists \max S_2$

Minimalni elementi od S_2:

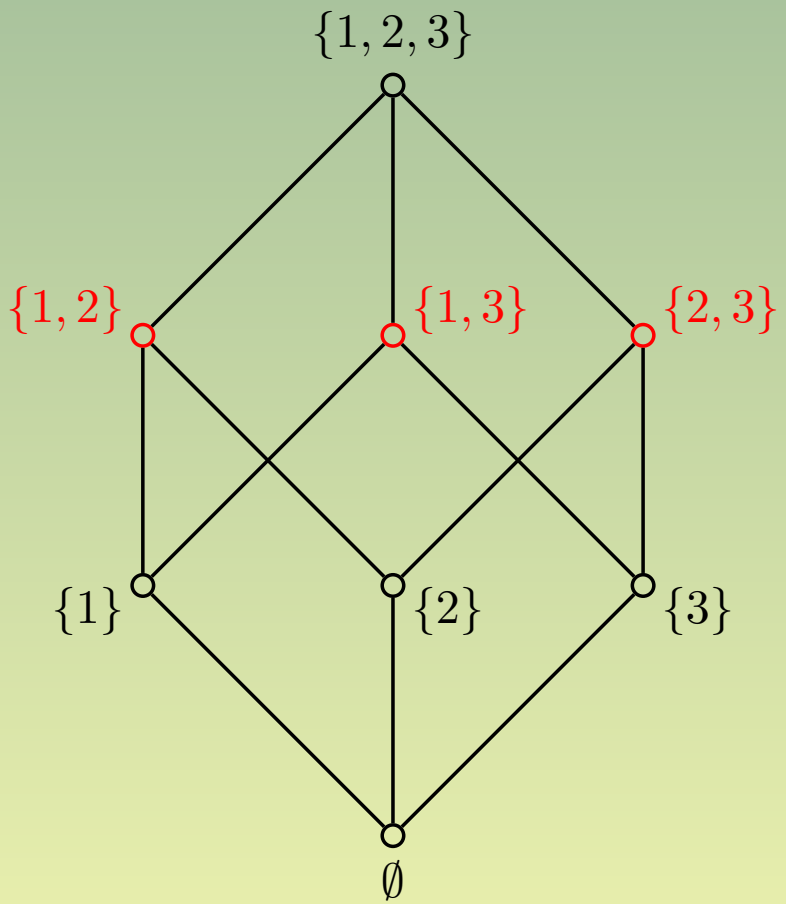
$\{3\},\ \{1,2\}$

Maksimalni elementi od S_2:

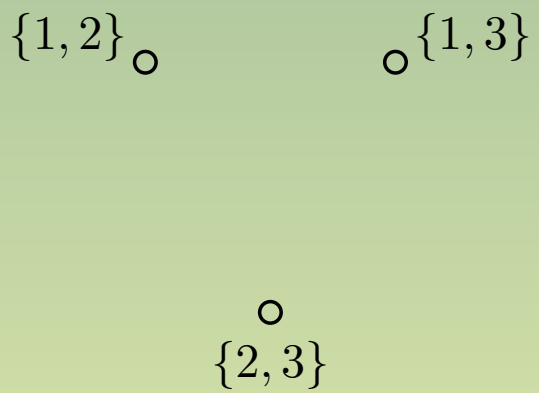
$\{3\},\ \{1,2\}$

Diskretne strukture s teorijom grafova
prof. dr. sc. Blaženka Divjak
Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$$S_3 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



Hasseov dijagram skupa S_3



$\inf S_3 = \emptyset, \qquad \nexists \min S_3$

$\sup S_3 = \{1,2,3\}, \qquad \nexists \max S_3$

Minimalni elementi od S_3:

$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$

Maksimalni elementi od S_3:

$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

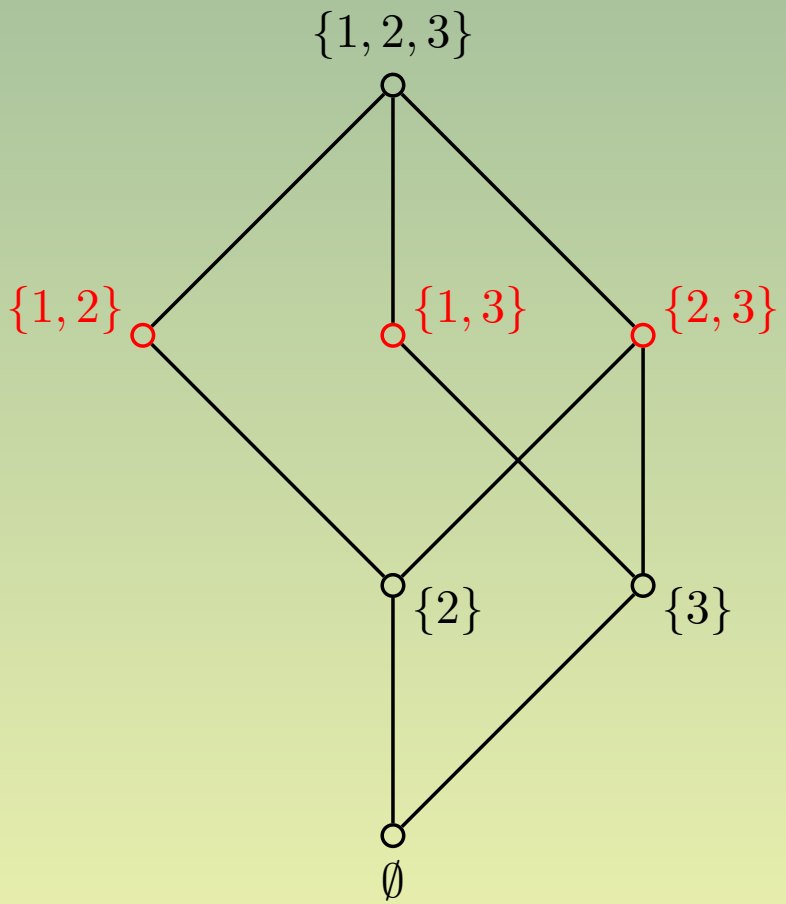
Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

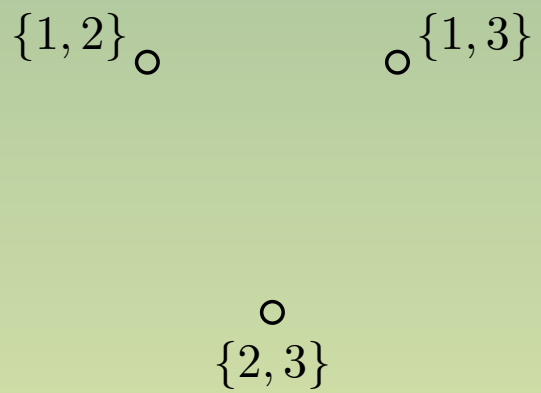
Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

$$S_3 = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\{1\}\}$$



Hasseov dijagram skupa S_3



$\inf S_3 = \emptyset, \qquad \nexists \min S_3$

$\sup S_3 = \{1,2,3\}, \qquad \nexists \max S_3$

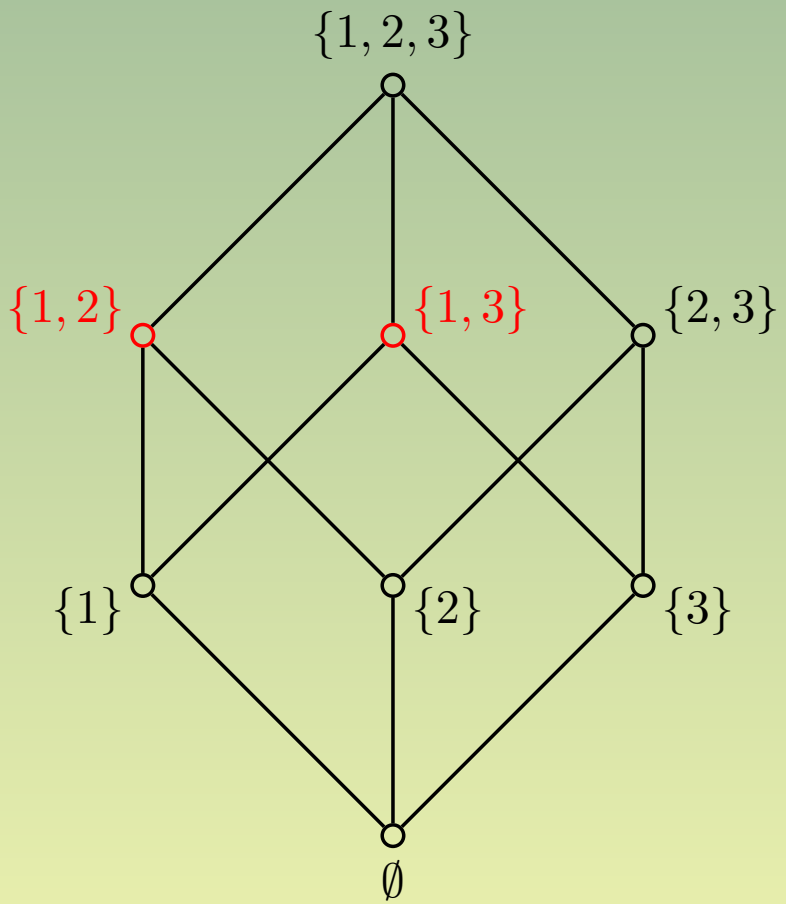
Minimalni elementi od S_3:

$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$

Maksimalni elementi od S_3:

$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$

$$S_4 = \{\{1,2\},\{1,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



Hasseov dijagram skupa S_4

$\{1,2\}$ $\quad$ $\{1,3\}$

$\inf S_4 = \{1\}, \quad \nexists \min S_4$

$\sup S_4 = \{1,2,3\}, \quad \nexists \max S_4$

Minimalni elementi od S_4:

$\{1,2\},\ \{1,3\}$

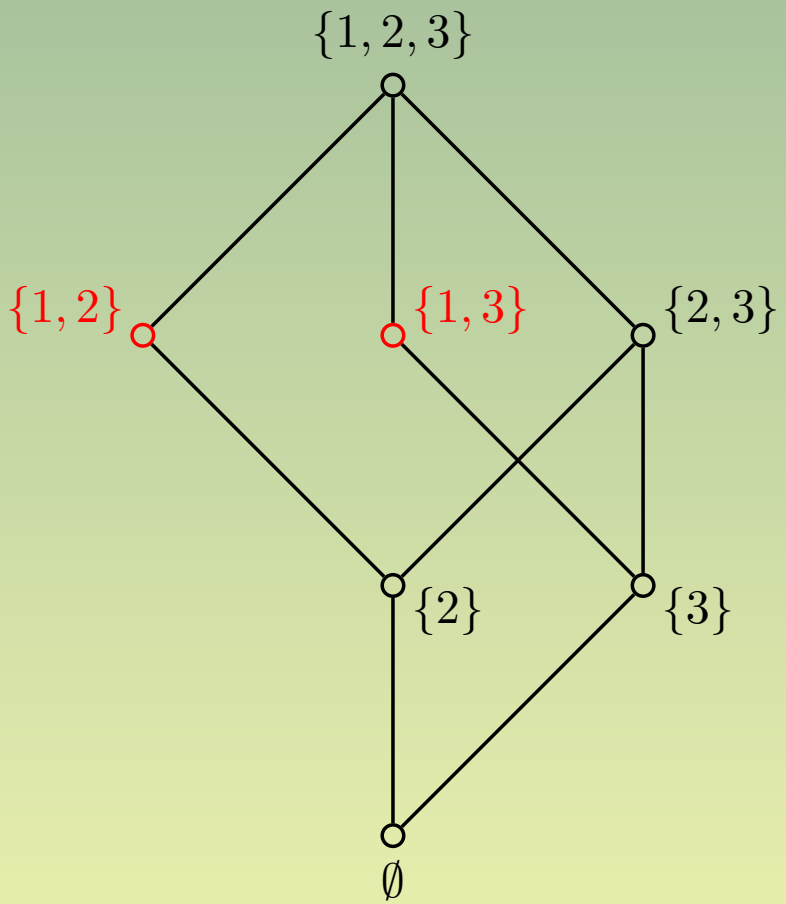
Maksimalni elementi od S_4:

$\{1,2\},\ \{1,3\}$

$\emptyset$ je donja međa skupa S_4 u $\mathcal{P}(X)$,
ali je $\{1\}$ najveća donja međa skupa S_4 u $\mathcal{P}(X)$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

$$S_4 = \{\{1,2\},\{1,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\{1\}\}$$



Hasseov dijagram skupa S_4

$\inf S_4 = \emptyset, \quad \nexists \min S_4$

$\sup S_4 = \{1,2,3\}, \quad \nexists \max S_4$

Minimalni elementi od S_4:

$\{1,2\},\ \{1,3\}$

Maksimalni elementi od S_4:

$\{1,2\},\ \{1,3\}$

Relacije

Skupovi (ponavljanje)

Binarne relacije

Relacija ekvivalencije

Kardinalni broj

Relacije uređaja

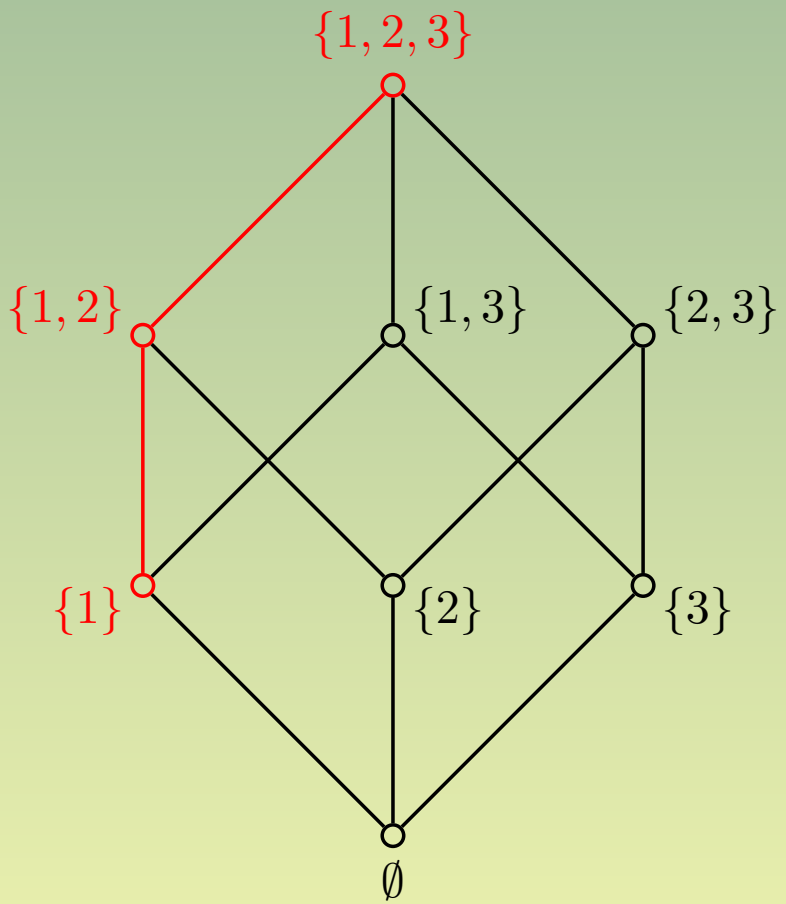
Linearni i dobar uređaj

Primjeri uređaja

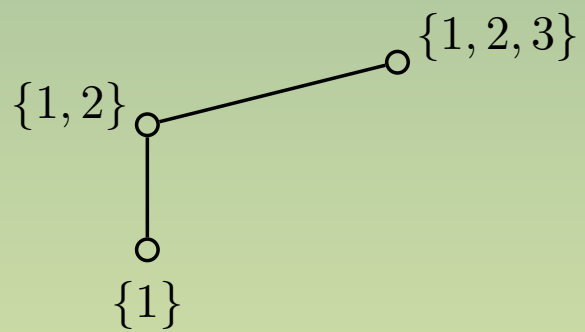
Uređaji na $A \times B$

Hasseovi dijagrami

$$S_5 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$



Hasseov dijagram skupa S_5



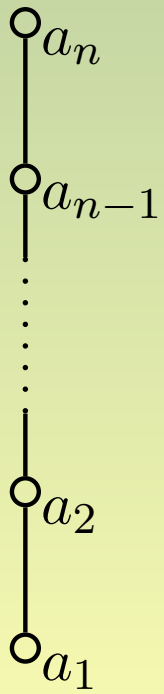
$$\inf S_5 = \min S_5 = \{1\}$$
$$\sup S_5 = \max S_5 = \{1,2,3\}$$

Napomena.

Neka je $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ konačni linearno uređen skup s

$$a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_{n-1} \prec a_n.$$

Hasseov dijagram skupa X tada izgleda



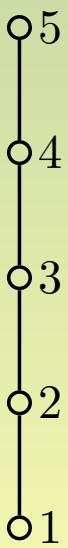
Primjer 3.37.

Nacrtajte Hasseov dijagram skupa $\left(\{1,2,3,4,5\},\leqslant\right)$ *gdje je* $\leqslant$ *standardni uređaj na* $\mathbb{R}$.

Primjer 3.37.

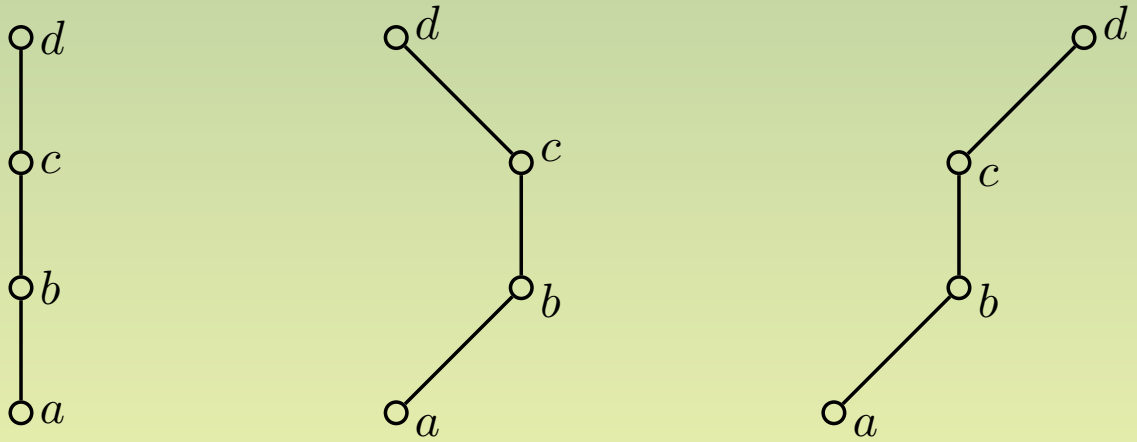
Nacrtajte Hasseov dijagram skupa $\left(\{1,2,3,4,5\}, \leqslant\right)$ *gdje je* $\leqslant$ *standardni uređaj na* $\mathbb{R}$.

Rješenje.



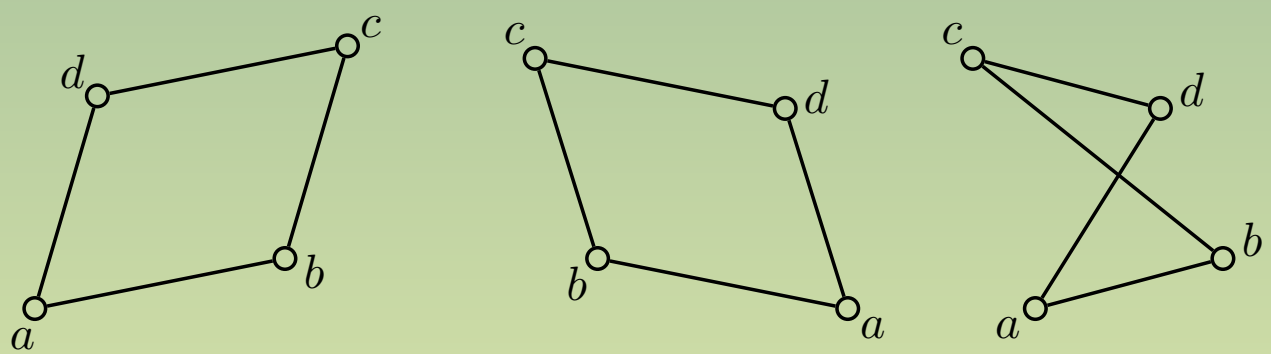
Napomena.

Treba biti oprezan kod crtanja Hasseovih dijagrama i imati na umu navedena pravila po kojima se crtaju Hasseovi dijagrami. Isto tako, Hasseov dijagram konačnog parcijalno uređenog skupa možemo nacrtati na više različitih načina ovisno o tome kako ćemo poredati točke u ravnini. Na primjer



su Hasseovi dijagrami istog parcijalno (u ovom slučaju linearno) uređenog skupa.

Isto tako,



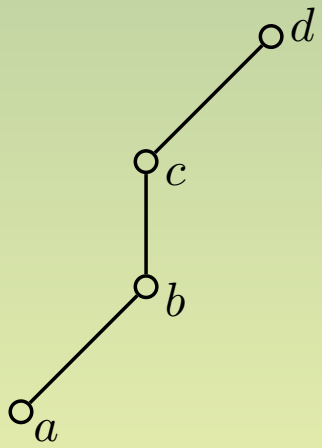
su Hasseovi dijagrami istog parcijalno uređenog skupa.
Uočite da elementi b i d nisu usporedivi jer ne postoji na Hasseovom dijagramu uzlazna linija od jednog elementa prema drugom. Nadalje, a je najmanji element, a c je najveći element.

Ponekad je problem nacrtati "lijepi" Hasseov dijagram.

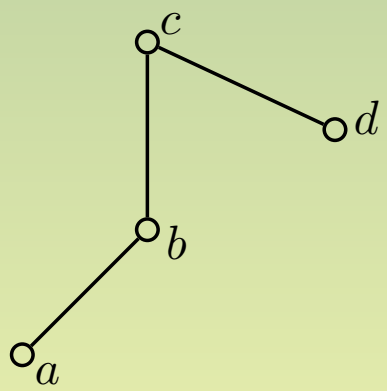
Napomena.

Sljedeći dijagrami jesu Hasseovi dijagrami, ali oni ne predstavljaju isti parcijalno uređeni skup

a)



b)



Pogledajmo da matrice incidencije nisu jednake.

a)

$x \setminus y$	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	0	1	1	1
c	0	0	1	1
d	0	0	0	1

- a je najmanji element (ujedno i minimalni)
- d je najveći element (ujedno i maksimalni)
- radi se o linearno uređenom skupu

b)

$x \setminus y$	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	1	1

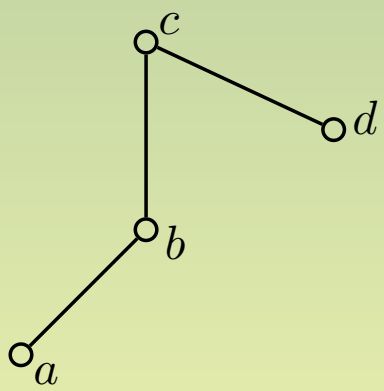
- nema najmanjeg elementa
- c je najveći element (ujedno i maksimalni)
- minimalni elementi su a i d
- nije linearno uređen skup jer, npr. a i d nisu usporedivi

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

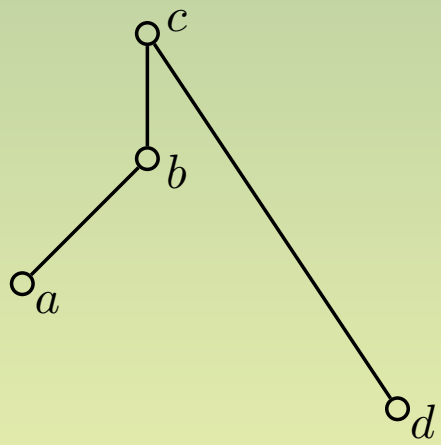
Napomena.

Sljedeći Hasseovi dijagrami predstavljaju isti parcijalno uređeni skup.

a)



b)



Pogledajmo da su matrice incidencije jednake.

a)

$x \setminus y$	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	1	1

b)

$x \setminus y$	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	0
c	0	0	1	0
d	0	0	1	1

Primjer 3.38 (Uređaj na kartezijevom produktu).

$$X_1 = \{1, 2\} \qquad X_2 = \{a, b\}$$

$$1 \preccurlyeq_1 2 \qquad a \preccurlyeq_2 b$$

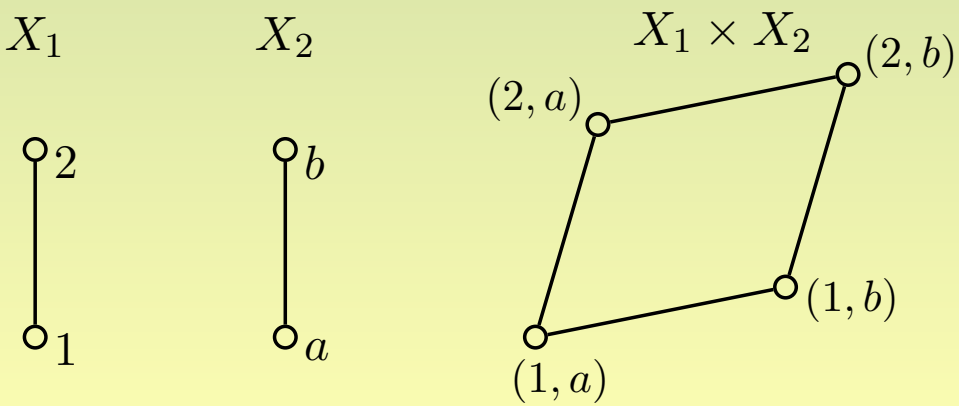
$$X_1 \times X_2 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

$$(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2) \overset{\text{def}}{\iff} x_1 \preccurlyeq_1 x_2 \quad \wedge \quad y_1 \preccurlyeq_2 y_2$$

$(1, a) \preccurlyeq (1, b),\ (1, a) \preccurlyeq (2, a),\ (1, a) \preccurlyeq (2, b)$

$(1, b)$ i $(2, a)$ nisu usporedivi

$(1, b) \preccurlyeq (2, b),\ (2, a) \preccurlyeq (2, b)$



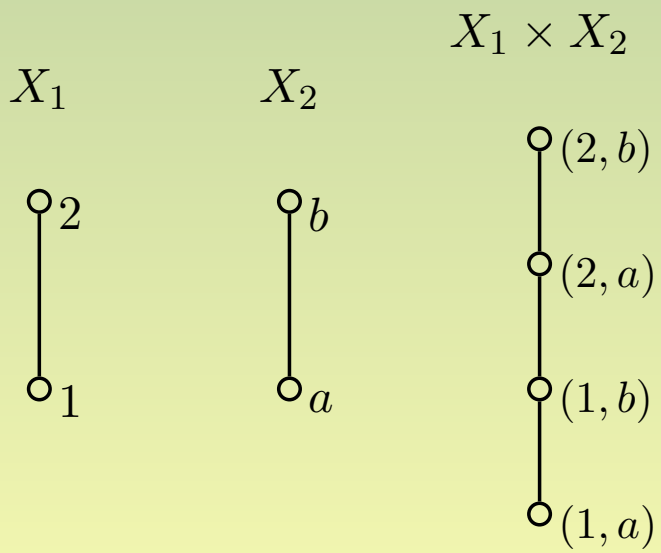
Primjer 3.39 (Leksikografski uređaj).

$$X_1 = \{1, 2\} \qquad X_2 = \{a, b\}$$

$$1 \preccurlyeq_1 2 \qquad a \preccurlyeq_2 b$$

$$X_1 \times X_2 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

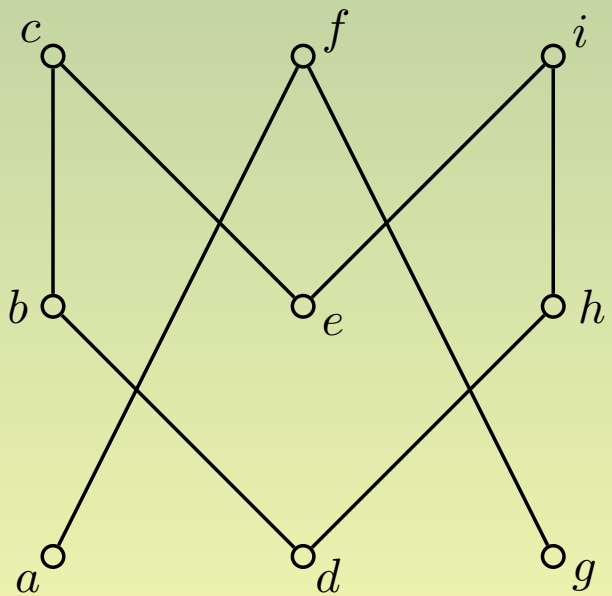
$$(x_1, y_1) \preccurlyeq_l (x_2, y_2) \overset{\text{def}}{\iff} x_1 \prec_1 x_2 \quad \vee \quad \big(x_1 = x_2 \ \wedge \ \ y_1 \preccurlyeq_2 y_2\big)$$



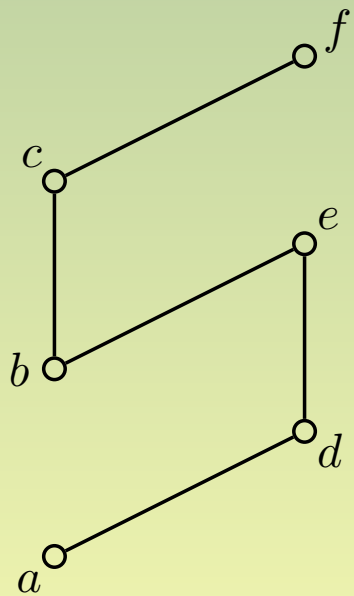
Primjer 3.40.

Ispišite elemente relacije parcijalnog uređaja $\preccurlyeq$ koja je zadana Hasseovim dijagramom. Također, odredite najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente.

a)



b)



Rješenje.

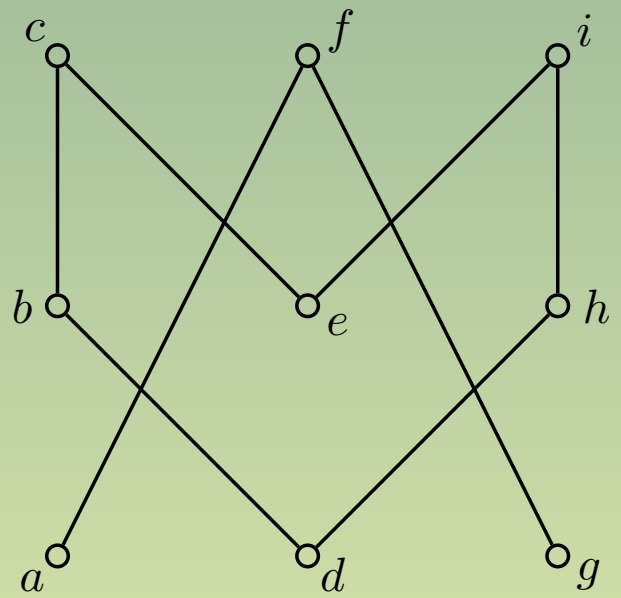
a) $\preccurlyeq = \{(a,a),(a,f),(b,b),(b,c),(c,c),(d,b),(d,c),(d,d),$
$(d,h),(d,i),(e,c),(e,e),(e,i),(f,f),(g,f),(g,g),$
$(h,h),(h,i),(i,i)\}$

- nema najvećeg, niti najmanjeg elementa
- minimalni elementi: a, d, e, g
- maksimalni elementi: c, f, i

b) $\preccurlyeq = \{(a,a),(a,d),(a,e),(b,b),(b,c),(b,e),(b,f),(c,c),$
$(c,f),(d,d),(d,e),(e,e),(f,f)\}$

- nema najvećeg, niti najmanjeg elementa
- minimalni elementi: a, b
- maksimalni elementi: e, f

Napomena.



$$\sup\{b,e\} = c, \quad \nexists \max\{b,e\}, \quad \nexists \inf\{b,e\}, \quad \nexists \min\{b,e\}$$

$\{b,e\}$ nema niti jednu donju među

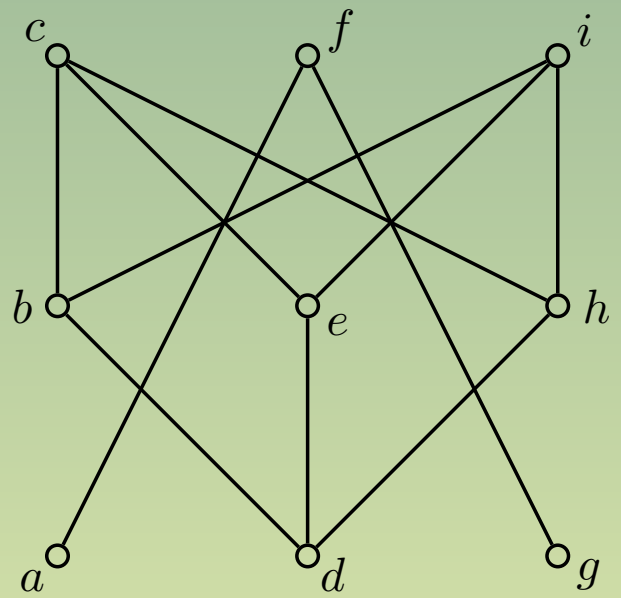
c je jedina gornja međa skupa $\{b,e\}$

$$\nexists \inf\{b,e,h\}, \quad \nexists \sup\{b,e,h\}$$

$\{b,e,h\}$ nema niti jednu donju, niti gornju među

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Napomena.



$$\nexists \sup\{b,e\}, \quad \nexists \max\{b,e\}, \quad \inf\{b,e\} = d, \quad \nexists \min\{b,e\}$$

$$\inf\{b,e,h\} = d, \quad \nexists \sup\{b,e,h\}$$

d je jedina donja međa skupa $\{b,e\}$ i skupa $\{b,e,h\}$

c i i su jedine gornje međe skupa $\{b,e\}$ i skupa $\{b,e,h\}$

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Relacije
Skupovi (ponavljanje)
Binarne relacije
Relacija ekvivalencije
Kardinalni broj
Relacije uređaja
Linearni i dobar uređaj
Primjeri uređaja
Uređaji na $A \times B$
Hasseovi dijagrami

Pitamo se zašto ne postoji supremum skupa $\{b, e\}$ iako on ima dvije gornje međe c i i. Naime, sjetimo se definicije supremuma. Supremum je po definiciji najmanja gornja međa. Drugim riječima, pogledamo sve gornje međe skupa $\{b, e\}$ i najmanja od njih je supremum tog skupa. Jedine gornje međe skupa $\{b, e\}$ su c i i pa bismo trebali uzeti manju od njih (najmanju), tj. tražimo $\min\{c, i\}$. Međutim, c i i nisu usporedivi pa ne postoji najmanja gornja međa, tj. ne postoji minimum skupa $\{c, i\}$ pa onda ne postoji supremum skupa $\{b, e\}$ (sjetimo se da najmanji element mora biti usporediv sa svima). Isto je objašnjenje za nepostojanje supremuma skupa $\{b, e, h\}$.

Primjer 3.41.

Neka je $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$. *Na skupu* A *definiramo relaciju* $\preccurlyeq$ *sa*

$$a \preccurlyeq b \overset{\text{def}}{\iff} \frac{a}{b} \in \mathbb{N}.$$

a. *Dokažite da je* $\preccurlyeq$ *parcijalni uređaj na* A.

b. *Nacrtajte Hasseov dijagram od* $\preccurlyeq$.

c. *Pronađite najveći, najmanji, minimalne i maksimalne elemente skupa* A.

d. *Da li je* $\preccurlyeq$ *linearni uređaj na* A? *Objasnite!*

Rješenje.

i. Refleksivnost

$$\frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; a \preccurlyeq a$$

ii. Antisimetričnost

$$a \preccurlyeq b \;\wedge\; b \preccurlyeq a \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} \in \mathbb{N} \;\wedge\; \frac{b}{a} \in \mathbb{N}$$

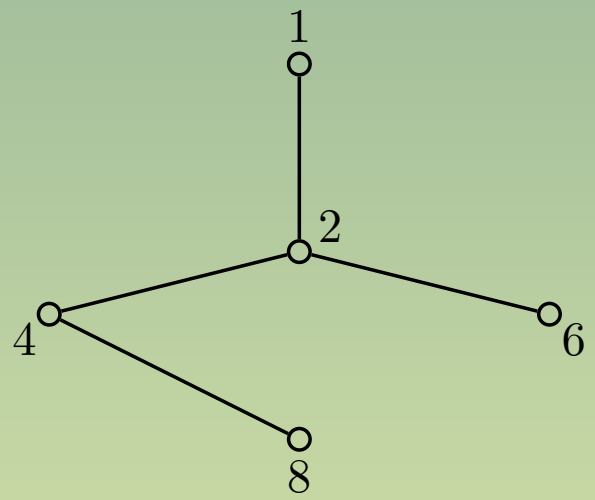
$$\underbrace{\frac{a}{b}}_{\in \mathbb{N}} \cdot \underbrace{\frac{b}{a}}_{\in \mathbb{N}} = 1, \quad a, b \in A \;\Rightarrow\; a = b$$

iii. Tranzitivnost

$$a \preccurlyeq b,\; b \preccurlyeq c \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} \in \mathbb{N},\; \frac{b}{c} \in \mathbb{N} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \frac{a}{c} \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; a \preccurlyeq c$$

x \ y	1	2	4	6	8
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0
6	1	1	0	1	0
8	1	1	1	0	1



- ne postoji najmanji element
- najveći element je 1
- maksimalni element je 1
- minimalni elementi: $8, 6$

$\not\asymp$ nije linearni uređaj na A jer, npr. elementi 6 i 8 nisu usporedivi. Isto tako, elementi 4 i 6 nisu usporedivi.

Zadatak 3.9.

a. *Navedite primjer parcijalno uređenog skupa koji ima najveći i najmanji element, ali nije linearno uređen.*

b. *Navedite primjer linearno uređenog skupa koji nema niti najmanji, niti najveći element.*

Teorem 3.7 (Zornova lema).

Svaki neprazni parcijalno uređeni skup u kojemu svaki lanac (linearno uređen podskup) ima gornju među, sadrži barem jedan maksimalni element.